第六章 计数原理

6.1 分类加法计数原理与分步乘法计数原理

对点上分

1. B 【解析】该高中毕业生可从 A 大学的 7 个专业或者 B 大学的 8 个专业中选 1 个,故不同的选择种数为 $7+8=15$.

2. B 【解析】依题意,第一个格子必须为黑色,则从左向右数,不管数到哪个格子,总有黑色格子数量不少于白色格子数量包含的情况有:

①全涂黑色,有 1 种方法;

②第一个格子涂黑色,另外四个格子中有一个格子涂白色,剩余格子都涂黑色,有 4 种方法;

③第一个格子涂黑色,另外四个格子中有两个格子涂白色,剩余格子都涂黑色,但此时第二、三个格子不能同时涂白色,有 5 种方法. 所以所求涂色方法种数为 $1+4+5=10$,**故选 B.**

3. A

攻略上分 由题设五位数的"回文数"为 $abcba$,则 $2a+2b+c=11$,分析可得 c 为奇数,从而直接运用分类加法计数原理求解.

【解析】设五位数的"回文数"为 $abcba$,其中 $a,b,c\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,因为各位数字之和为 11,所以 $2a+2b+c=11$,

因为 $2a+2b$ 为偶数,所以 c 为奇数.

关键点 先推导出 c 为奇数,从而确定分类标准

若 $c=1$,则 $a+b=5$,故 (a,b) 的组合有 $(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)$,则"回文数"共有 4 个;

若 $c=3$,则 $a+b=4$,故 (a,b) 的组合有 $(1,3),(2,2),(3,1)$,则"回文数"共有 3 个;

若 $c=5$,则 $a+b=3$,故 (a,b) 的组合有 $(1,2),(2,1)$,则"回文数"共有 2 个;

若 $c=7$,则 $a+b=2$,故 (a,b) 的组合有

(1,1),则"回文数"共有 1 个;

易知 $c\neq 9$.

综上,满足条件的五位"回文数"的个数为 $4+3+2+1=10$. **故选** A.

4. B

思路导引 根据题意计算出三位游客分别从四个景点中随机选择一个的情况总数 N,再计算出恰有两个人选择同一景点的情况数 n,根据古典概型得所求概率 $P=\frac{n}{N}$,即可求解.

【解析】三位游客分别从四个景点中随机选择一个,共有 $N=4\times4\times4=64$(种)情况;先从三位游客中选择两个人去同一个景点,有 3 种不同的方法,景点有 4 种选择,最后剩下的游客还有三个景点可以选择,所以三人中恰有两人选择同一景点的情况数 $n=3\times4\times3=36$,所以恰有两人选择同一景点的概率 $P=\frac{n}{N}=\frac{36}{64}=\frac{9}{16}$. **故选** B.

5. A

攻略上分 0 不能排首位,可以从其余两个数字中选一个排首位,然后再排其余四个数位,又因为这三个数字必须全部使用,所以可利用正难则反的处理策略.

【解析】先保证首位不为 0 且同一数字不能相邻出现,

提示:限制条件复杂,暂不考虑三个数字必须全部使用

则首位有 2 种选择且其余各位均有 2 种选择,可得这样的五位数的个数为 $2\times2^4=32$;

然后考虑首位不为 0,且只有两个数字组成的五位数,有 20 202,10 101,12 121,21 212,共 4 种情况.

所以所求五位数的个数为 $32-4=28$.

提示:正难则反

故选 A.

6. 36 【解析】因为 $1\ 800=2^3\times3^2\times5^2$,所以 1 800 的每一个正因数都可以表示为 $2^m\times3^n\times5^k$,其中 $m\in\{0,1,2,3\}$,$n\in\{0,1,2\}$,$k\in\{0,1,2\}$. m 有 4 种选

法，n 有 3 种选法，k 有 3 种选法，由分步乘法计数原理得 1 800 的正因数有 $4\times3\times3=36$（个）.

方法总结 对于一个数 $N=p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdot p_3^{a_3}\cdot\cdots\cdot p_n^{a_n}$，其中 p_i 为质数，a_i 为正整数，$i=1,2,3,\cdots,n$，每一个正因数都可表示为 $p_1^{t_1}\cdot p_2^{t_2}\cdot\cdots\cdot p_n^{t_n}$，其中 $0\leqslant t_1\leqslant a_1$，$0\leqslant t_2\leqslant a_2$，$\cdots$，$0\leqslant t_n\leqslant a_n$（其中 $t_1,t_2,\cdots,t_n\in\mathbf{N}$）. 所以 t_1 有 (a_1+1) 种不同的选法，t_2 有 (a_2+1) 种不同的选法，$\cdots$，t_n 有 (a_n+1) 种不同的选法，由分步乘法计数原理可以得到数 N 的正因数的个数为 $(a_1+1)(a_2+1)\cdot\cdots\cdot(a_n+1)$.

7. 37 【解析】将 A,B,C 三个人随机安排到甲、乙、丙、丁这四个部门工作，有 4^3 种不同的方案；又甲部门必须有人，所以应去掉将 A,B,C 三个人随机安排到乙、丙、丁这三个部门工作的 3^3 种方案，则不同的安排方法种数是 $4^3-3^3=37$.

提示：正难则反思想

8. D 【解析】先依次对区域 3，4，5 染色，有 $4\times3\times2=24$（种）方法，再对区域 1，2 染色，分两种情况：若区域 2 和 3

易错点 忽略区域 2，3 是否同色对区域 1 染色方法数的影响导致错误

同色，区域 1 有 3 种染色方法，则不同的染色方法有 $3\times24=72$（种）；若区域 2 和 3 不同色，则区域 2 有 2 种染色方法，区域 1 有 2 种染色方法，则不同的染色方法有 $2\times2\times24=96$（种）.

综上所述，不同的染色方法有 $72+96=168$（种）. **故选 D.**

易错警示 不能合理分类或准确分步致错

在应用分类加法计数原理和分步乘法计数原理求解问题时，应分清是“分类”还是“分步”. 分类时要做到不重不漏，每一类中每一种方法都能完成一件事；分步时各步相互独立，步骤完整，只有每一步都做完，才能完成这件事.

9. B 【解析】根据题意,按甲的选择不同分成 2 种情况讨论:

若甲选择牛,则此时乙的选择有 2 种,丙的选择有 10 种,

提示:每种生肖的吉祥物只有一个

此时有 $2\times10=20$(种)不同的选法;

若甲选择马或猴,此时甲的选择有 2 种,乙的选择有 3 种,丙的选择有 10 种,此时有 $2\times3\times10=60$(种)不同的选法.

则一共有 $20+60=80$(种)不同的选法. **故选 B.**

10. AC

攻略上分 本题是综合应用问题,涉及到限制奇偶、限制大小的问题,可用攻略 1 中的方法求解.

【解析】对于 A,要为偶数,个位可以为 2 或 4 或 6,有 3 种情况,十位和百位在剩下的 5 个数字中任取 2 个,所以偶数共有 $3\times5\times4=60$(个),**故 A 正确.**

对于 B,比 300 大的奇数,首先百位要大于等于 3,个位要为奇数,

当百位为 3 或 5 时,个位都只有 2 种情况,十位在剩下的 4 个数字中任选 1 个,此时比 300 大的奇数有 $2\times2\times4=16$(个);

当百位为 4 或 6 时,个位都有 3 种情况,十位在剩下的 4 个数字中任选 1 个,此时比 300 大的奇数有 $2\times3\times4=24$(个),所以比 300 大的奇数共有 $16+24=40$(个),**故 B 错误.**

对于 C,个位和百位数字之和为 7 的情况有(1,6)或(2,5)或(3,4),共 3 种情况,则符合题意的三位数有 $3\times2\times4=24$(个),**故 C 正确.**

提示:要考虑个位与百位数字的顺序

对于 D,能被 3 整除,则 3 个数字之和为 3 的倍数,共有(1,2,3),(1,2,6),(1,3,5),(1,5,6),(2,3,4),(2,4,6),(3,4,5),(4,5,6)这 8 种情况,每种情况都需要考虑个位、十位、百位的顺序,所以能被 3 整除的数有 $8\times3\times2\times1=48$(个),**故 D 错误. 故选 AC.**

能力上分

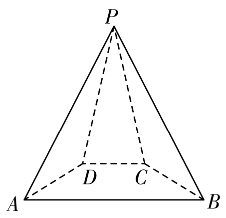
1. A　【解析】从 $A \to C$ 可以分为两类路线：

第一类，从点 A 直接到点 C，有从弦 AC 和 $\overset{\frown}{AC}$ 2 种走法；

第二类，从点 A 经过点 B 再到点 C，同理，从点 A 到点 B 有 2 种走法，且从点 B 到点 C 有从弦 BC、线段 BO 和 OC 以及 $\overset{\frown}{BC}$ 3 种走法，所以第二类共有 $2\times3=6$（种）走法.

所以从 $A \to C$ 的不同走法有 $2+6=8$（种）.

2. C　【解析】设四棱锥为 $P-ABCD$，



由题意，依次对点 P,A,B 涂色，则点 P,A,B 分别有 5,4,3 种涂法，

当 C 与 A 颜色相同时，C 有 1 种涂色方法，此时 D 有 3 种涂色方法，

当 C 与 A 颜色不相同时，C 有 2 种涂色方法，此时 D 有 2 种涂色方法，

故不同的涂色方法共有 $5\times4\times3\times(1\times3+2\times2)=420$（种）. **故选 C.**

3. B　【解析】第一步排 A，有 2 种可能：第 2 名或第 5 名；

第二步排 B 和 C，有 2 种可能；

第三步排 D 和 E，D 有第 6,7,8 名 3 种可能：当 D 为第 6 名时，E 有第 7,8,9 名 3 种可能，当 D 为第 7 名时，E 有第 8,9 名 2 种可能，当 D 为第 8 名时，E 只有第 9 名 1 种可能，所以第三步有 $3+2+1=6$（种）可能；

根据分步乘法计数原理，所有名次的可能性有 $2\times2\times6=24$（种）. **故选 B.**

4. AB　【解析】对于 A，每块区域任意涂上 1 种颜色，即每块区域都有 4 种选择，则有 $4\times4\times4\times4\times4=4^5$（种）不同涂法，**故 A 正确**；

对于 B，若只用 3 种不同颜色，且相邻区域不同色，则 B 和 D 同色，A 和 E 同色，故共有 $4\times3\times2=24$（种）不同涂法，

故 B 正确；

对于 C,若 4 种不同颜色全部用上,B,D 同色,则可以先涂 B,D 区域,有 4 种涂法,再将余下的 3 种颜色分别涂在 A,C,E 三块区域,有 $3\times2\times1=6$(种)涂法,则共有 $4\times6=24$(种)涂法,**故 C 错误**;

对于 D,按照 A,B,C 的顺序涂,每一块区域需要 1 种颜色,此时有 $4\times3\times2=24$(种)涂法,因为 B,D 不同色,

提示:D 只有 1 种颜色可选

所以此时 A,B,C,D 四块区域所用颜色各不相同,E 只能与 A 同色,此时共有 24 种涂法,**故 D 错误. 故选 AB.**

5. D 【解析】张先生不同的选购方法分为三类:选购一种,选购两种,选购三种.

选购一种商品的方法有 $4+6+7=17$(种),

选购两种商品的方法有 $4\times6+4\times7+6\times7=94$(种),

选购三种商品的方法有 $4\times6\times7=168$(种),

由分类加法计数原理可得张先生不同的选购方法种数为 $17+94+168=279$,**故选 D.**

6. 18 【解析】公差为 0 的情况有 6 种:111,222,333,444,555,666;

公差为 ±1 的情况有 8 种:123,234,345,456,321,432,543,654;

公差为 ±2 的情况有 4 种:135,246,531,642,

所以 3 次骰子点数按抛掷顺序构成等差数列的情况有 $6+8+4=18$(种).

7. 17 【解析】至少有 3 名工人岗位变动可以分为两类:

第一类,恰有 3 名工人岗位变动,先从 4 名工人中选出 1 名保持岗位不变,剩余 3 名工人安排到不同的岗位,共有

提示:只有 2 种方式

$4\times2=8$(种)方式;

第二类,4 名工人岗位全部变动,则不妨记 4 名工人分别为 a,b,c,d,对应的岗位分别为 1,2,3,4,

工人 a 有 3 种岗位可以选择,若工人 a 选择岗位 2,则工人 b,c,d 选择对应

的岗位为 1,4,3 或 3,4,1 或 4,1,3,共 3 种轮岗方式,同理,工人 a 选择岗位 3 或 4 时,也分别有 3 种轮岗方式,所以 4 名工人进行轮岗有 $3\times3=9$(种)方式.

综上,共有 $8+9=17$(种)轮岗方式.

8. 30　10　【解析】依题意,十位数字是 1 的"凹数"个数为 4^2;十位数字是 2 的"凹数"个数为 3^2;十位数字是 3 的"凹数"个数为 2^2;十位数字是 4 的"凹数"个数为 1,所以所求"凹数"的个数是 $4^2+3^2+2^2+1=30$.

1,2,3,4,5 除以 3 的余数依次为 1,2,0,1,2,

因此能被 3 整除的"凹数"含有数字 3 时,另两个数字除以 3 的余数不同,

提示: 余数相加是 3 的倍数

当含数字 3,十位数字是 1 时,另两个数字为 2,3 或 3,5;十位数字是 2 时,另两个数字为 3,4;十位数字是 3 时,另两个数字为 4,5,共有 $4\times2=8$(个).

当不含数字 3,3 个数字除以 3 的余数相同,十位数字是 1 时,另两个数字为 4,4,十位数字是 2 时,另两个数字为 5,5,共 2 个,

所以能被 3 整除的"凹数"的个数为 $8+2=10$.

9. 攻略上分　(1)(2)直接分步,先确定百位上的数字,再分析十位与个位,进而计算出正确答案.

(3)根据分类加法计数原理、分步乘法计数原理,分别分析一位数、两位数与三位数满足条件的个数从而计算出正确答案.

【解】(1)要确定一个三位数,可分三步进行:第一步,确定百位,百位不能为 0,有 9 种选法;第二步,确定十位,有 10 种选法;第三步,确定个位,有 10 种选法,

根据分步乘法计数原理,共有 $9\times10\times10=900$(个).

(2)要确定一个无重复数字的三位数,可分三步进行:第一步,确定百位,百位不能为 0,有 9 种选法;第二步,确定

十位,有 9 种选法;第三步,确定个位,有 8 种选法,

根据分步乘法计数原理,无重复数字的三位数共有 $9\times9\times8=648$(个).

(3)根据题意,小于 500 且没有重复数字的自然数分为以下三类:

易错点 忽略位数不限造成遗漏

第一类,满足条件的一位自然数,有 10 个.

第二类,满足条件的两位自然数,有 $9\times9=81$(个).

提示: 多位数首位不为 0

第三类,满足条件的三位自然数,可分以下三步确定:

第一步,确定百位,百位数字可取 1,2,3,4,有 4 种选法;

第二步,确定十位,有 9 种选法;

第三步,确定个位,有 8 种选法.

根据分步乘法计数原理,共有 $4\times9\times8=288$(个).

所以小于 500 且没有重复数字的自然数共有 $10+81+288=379$(个).

6.2 排列与组合

6.2.1 排列+

6.2.2 排列数

对点上分

1. B 【解析】对于 A,从 10 个人中选 2 人分别去种树和扫地,因为工作内容不一样,故有顺序,属于排列问题,**故 A 不满足题意**;

对于 B,从班上 30 名男生中选出 5 人组成一个篮球队,没有顺序,所以不属于排列问题,**故 B 满足题意**;

对于 C,从班上 30 名学生中选出 6 人,分别担任 6 科课代表,因为科目不相同,故有顺序,属于排列问题,**故 C 不满足题意**;

对于 D,从 1,2,3,4,5 这 5 个数字中取出 2 个不同的数字组成一个两位数,数字所在位置有顺序,属于排列问题,**故 D 不满足题意. 故选 B.**

关键点拨 判断一个问题是不是排列问题，关键在于选出的不同元素是否与顺序有关，若与顺序有关，则是排列问题.

2. D 【解析】由题意可知，每两位同学之间都要互发一条问候微信，所以他们发出的微信总数是 $10\times9=90$.

3. B 【解析】根据排列数的定义得 $18\times19\times20\times21\times\cdots\times30$ 可以表示为 A_{30}^{13}.

4. C 【解析】由 $A_6^x<6A_6^{x-2}$，得 $\frac{6!}{(6-x)!}<6\times\frac{6!}{(8-x)!}$，整理得 $x^2-15x+50<0$，解得 $5<x<10$，又因为 $2\leqslant x\leqslant6$，$x\in\mathbf{N}^*$，所以 $x=6$. **故选 C.**

易错警示 忽视排列数公式的隐含条件致错

A_n^m 表示从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数，所以必有 $m\leqslant n$，$m,n\in\mathbf{N}^*$，如本题利用"$m\leqslant n$，$m,n\in\mathbf{N}^*$"，得到"$2\leqslant x\leqslant6$"；由"$x\in\mathbf{N}^*$"得到"$x=6$".

5. (1) 60　(2) 6　【解析】(1) **方法一：** $3A_4^2+A_4^3=3\times4\times3+4\times3\times2=60$.

方法二： 根据排列数的性质 $A_n^m=mA_{n-1}^{m-1}+A_{n-1}^m$ 可得，$3A_4^2+A_4^3=A_5^3=5\times4\times3=60$.

(2) 由题意，$3A_8^x=4A_9^{x-1}$，即 $3\times\frac{8!}{(8-x)!}=4\times\frac{9!}{(10-x)!}$，

化简可得 $3=4\times\frac{9}{(10-x)(9-x)}$，即 $x^2-19x+78=0$，解得 $x=13$ 或 $x=6$.

因为 $\begin{cases}x\leqslant8,\\x-1\leqslant9,\end{cases}$ 所以 $x\leqslant8$，故 $x=6$.

6. B

攻略上分 若采用特殊元素优先法，则根据志愿者小王不去文艺文化项目，可以先将小王分配到其他 3 个项目之一，再分配其他 3 名志愿者，利用分步乘法计数原理求不同的分配方案数；若采用特殊位置优先法，则文艺文化项目不能分配志愿者小王，先从其他 3 名志愿者中选 1 人分配到文艺文化项

目，再将剩下 3 人分配到其他 3 个项目，利用分步乘法计数原理求不同的分配方案数；此外，也可用间接法求解.

【解析】（特殊元素优先法）由题意，先将志愿者小王分配到其他 3 个项目之一，有 $A_3^1=3$（种）分配方法，再将其他 3 名志愿者分配到剩下的 3 个项目，有 $A_3^3=6$（种）分配方法，由分步乘法计数原理，志愿者小王不去文艺文化项目的分配方法有 $3\times6=18$（种）. **故选** B.

一题多解 1 （特殊位置优先法）因为志愿者小王不去文艺文化项目，所以先从其他 3 名志愿者中选 1 名志愿者分配到文艺文化项目，有 $A_3^1=3$（种）分配方法，再将剩余 3 名志愿者分配到剩下的 3 个项目，有 $A_3^3=6$（种）分配方法，由分步乘法计数原理，志愿者小王不去文艺文化项目的分配方法有 $3\times6=18$（种）. **故选** B.

一题多解 2 （间接法）由题意，4 名志愿者任意分配共有 $A_4^4=24$（种）分配方法，若志愿者小王去文艺文化项目，其他 3 名志愿者任意分配有 $A_3^3=6$（种）分配方法，所以志愿者小王不去文艺文化项目的分配方法有 $24-6=18$（种）. **故选** B.

7. B 【解析】若选中甲，没选中乙，共有 $A_4^3=24$（种）安排方式；

若选中乙，没选中甲，共有 $3A_4^3=72$（种）安排方式；

若甲和乙都被选中，共有 $2A_4^2=24$（种）安排方式，所以不同的安排方式种数为 $24+72+24=120$. **故选** B.

8. 64

攻略上分 根据特殊位置优先，先考虑最左边一列两个数字为 2 和 6，根据题意，3，5 不能放在同一列，利用间接法可得出放法种数，同理可得出最左边一列两个数字为 3 和 5 的放法种数，即可得解.

【解析】在标有数字 1,2,3,4,5,6 的六张卡片中,2+6=3+5=8,

若最左边一列两个数字为 2 和 6,则根据题意,3,5 不能放在同一列,

此时,右边两列不同的放法种数为 $A_4^4-2A_2^2A_2^2=16$,

提示:右边两列 4 个数的全排列,减去 3,5 排在同一列的放法种数

所以若最左边一列两个数字为 2 和 6,符合条件的放法种数为 $2\times16=32$.

同理,若最左边一列两个数字为 3 和 5,符合条件的放法种数为 32.

因此,满足条件的放法种数为 $32\times2=64$.

9. C　【解析】《三国演义(上)》和《三国演义(下)》进行全排列,有 A_2^2 种排法,将它们"捆绑"在一起,与其他三本书进行全排列,有 A_4^4 种排法,由分步乘法计数原理,得不同的放书顺序有 $A_2^2A_4^4=48$(种). **故选** C.

10. C　【解析】先将除了甲、乙外的 4 位专家全排列,有 A_4^4 种方法,再将甲、乙插入 4 位专家形成的 5 个间隔中,有 A_5^2 种方法,所以这 6 位专家的不同发言顺序共有 $A_4^4A_5^2=480$(种). **故选** C.

11. D　【解析】由题意知,礼与乐不能相邻,射与御要相邻,

可将射与御进行捆绑看成一个整体,共有 A_2^2 种排课顺序;然后与书、数进行排序,共有 A_3^3 种排课顺序;最后将乐与礼插入 4 个空即可,共有 A_4^2 种排课顺序.

由于是分步进行,所以共有 $A_2^2\cdot A_3^3\cdot A_4^2=144$(种)排课顺序. **故选** D.

12. A

攻略上分　因为 3 名教师互不相邻,4 名女同学相邻且不在最左边也不在最右边,2 名男同学互不相邻且不在最左边也不在最右边,所以本题综合考查了相邻问题捆绑法、不相邻问题插空法.

【解析】第一步:先将 3 名教师全排列,

共有 A_3^3 种排法;第二步:将 4 名女同学"捆绑"在一起,共有 A_4^4 种排法;第三步:将"捆绑"在一起的 4 名女同学作为一个元素,在第一步后 3 名教师形成的中间的 2 个空中选择 1 个插入,有 A_2^1 种排法;第四步:首先将 2 名男同学之中的 1 人,插入第三步后相邻的 2 名教师中间,然后将另 1 个男同学插入由女同学与教师形成的 2 个空中的其中 1 个,共有 $A_2^1A_2^1$ 种排法,所以不同的排法种数为 $A_3^3A_4^4A_2^1A_2^1A_2^1=1\ 152$. **故选** A.

13. A

攻略上分 将(香菇、新笋、豆腐干)看作一个元素,将鸡脯肉、(香菇、新笋、豆腐干)、果干、茄子四个元素进行全排列,定序问题用倍缩法可得结果.

【**解析**】将(香菇、新笋、豆腐干)看作一个元素,因为鸡汤最后下锅,所以将鸡脯肉、(香菇、新笋、豆腐干)、果干、茄子四个元素进行全排列.

因为结果包含两种情况:茄子在鸡脯肉前下锅、茄子在鸡脯肉后下锅,

所以茄子在鸡脯肉后下锅的不同下锅顺序有 $\frac{A_4^4}{2}=12$(种). **故选** A.

14. D 【**解析**】6 人全排有 A_6^6 种排序方法,所以在先到的 4 人相对顺序不变的条件下,这 2 名同学共有 $\frac{A_6^6}{A_4^4}=30$(种)加入方法. **故选** D.

15. B

攻略上分 e 的前 6 位数字 2,7,1,8,2,8 中有 2 个 2,2 个 8,在排列中它们之间的顺序没有区别,相当于对应 2 个元素的顺序是固定的,根据倍缩法可得结果.

【**解析**】6 位数字 2,7,1,8,2,8 中有 2 个 2,2 个 8,在每一种排列中它们之间的顺序没有区别,相当于对应 2 个元素的顺序是固定的,故所组成的 6 位数密码有 $\frac{A_6^6}{A_2^2A_2^2}=180$(个),**故选** B.

16.【解】(1)先安排男生,有 A_4^4 种情况,再将 3 名女生插空,有 A_5^3 种情况,故 3 名女生不相邻的站法有 $A_4^4A_5^3=1\ 440$(种).

提示: 不相邻问题用插空法

(2)4 名男生和 3 名女生站成一排,共有 A_7^7 种情况,其中男生甲在排头的情况有 A_6^6 种,女生乙在排尾的情况有 A_6^6 种,男生甲在排头的同时,女生乙在排尾的情况有 A_5^5 种,

所以男生甲不在排头,女生乙不在排尾的站法有 $A_7^7-A_6^6-A_6^6+A_5^5=3\ 720$(种).

(3)甲、乙、丙 3 人从左到右的顺序不变,即站法有 $\frac{A_7^7}{A_3^3}=840$(种).

提示: 定序问题用倍缩法

能力上分

1. B

攻略上分 将辩论社与国学社捆绑,看成 1 个整体,与其他 3 个社团排成一列,再考虑辩论社与国学社的顺序,可得结果.

【解析】将辩论社与国学社捆绑,看成 1 个整体,与其他 3 个社团排成一列,有 $A_4^4=24$(种)排法. 又辩论社与国学社的内部排序有 2 种情况,则满足题意的排法有 48 种. **故选** B.

2. A

攻略上分 因为 Future 中有 2 个相同的字母 u,相当于这 2 个字母顺序固定,所有拼写顺序可以由倍缩法求得.

【解析】由于 Future 中有 2 个相同的字母 u,因此小亮乱写,共有 $\frac{A_6^6}{A_2^2}=360$(种)写法,正确的写法只有 1 种,所以若小亮乱写,则小亮写正确的概率是 $\frac{1}{360}$. **故选** A.

3. D

思路导引 因为从 6 个小球中取出 5 个小球且相同颜色的小球不能相邻,同色小球没有区别,所以可以根据剩下的 1 个小球的颜色进行分类.

【解析】剩下的 1 个小球是红色小球

时，排法种数为 1.

剩下的 1 个小球是黄色小球时，排法种数为 2.

剩下的 1 个小球是绿色小球时，当红色小球在 2 个黄色小球之间时，有 $\frac{A_4^2}{A_2^2}=6$（种）排法；

提示：2 个绿色小球插入 1 个红球与 2 个黄球形成的 4 个空位中，同时注意到 2 个绿球没有顺序区别

当红色小球不在 2 个黄色小球之间时，有 $2\times3=6$（种）排法.

所以不同的排法种数是 $1+2+6+6=15$. **故选** D.

4. C

攻略上分 先排女生，再利用插空法排男生，同时要注意剔除女生甲排在最后一个的情况.

【解析】第一步：先不考虑女生甲的位置限制，计算 3 位男生中任何两人都不连着出场的排法种数.

先排 3 位女生，有 A_3^3 种排法，3 位女生排好后会产生 4 个空位，从这 4 个空位中选 3 个排男生，共有 A_4^3 种排法，根据分步乘法计数原理，不考虑女生甲位置限制时，3 位男生中任何两人都不连着出场的排法种数为 $A_3^3A_4^3=144$.

第二步：计算女生甲排在最后一个且 3 位男生中任何两人都不连着出场的排法种数.

若女生甲排在最后一个，则先排另外 2 位女生，有 A_2^2 种排法，这 2 位女生排好后会产生 3 个空位，这 3 个空位用来排 3 位男生，有 A_3^3 种排法，根据分步乘法计数原理，女生甲排在最后一个且 3 位男生中任何两人都不连着出场的排法种数为 $A_2^2A_3^3=12$.

综上，根据题意，满足题目要求的排法有 $144-12=132$（种）. **故选** C.

5. D 【解析】三次点数之和为 8 或 16 的有 (1,2,5)，(1,3,4)，(1,1,6)，(2,2,4)，(2,3,3)，(4,6,6)，(5,5,6)，共有 7 种组合，

前 2 种组合 (1,2,5)，(1,3,4) 可以分别排列出 $A_3^3=6$（种）结果，共有 $2A_3^3=2\times6=12$（种）结果；

后 5 种组合可以分别排列出 3 种结果，共有 $5\times3=15$（种）结果.

由分类加法计数原理知，共有 $12+15=27$（种）结果.

抛三次骰子共有 $6\times6\times6=216$（种）结果，

故抛掷三次骰子后棋子恰好又回到点 A 处的概率 $P=\dfrac{27}{216}=\dfrac{1}{8}$. **故选 D.**

6. B 【解析】当一排座位共有 7 个，现有 6 位同学来坐，每人只能坐 1 个座位时，不同的坐法有 $A_7^6=5\ 040$（种）；当一排座位共有 7 个，现有 6 位同学来坐，每人只能坐 1 个座位，其中甲、乙两人坐在相邻的两个座位上时，不同的坐法有 $6A_2^2A_5^4=1\ 440$（种）.

所以甲、乙两人不能坐在相邻的两个座位上时，不同的坐法有 $5\ 040-1\ 440=3\ 600$（种）. **故选 B.**

7. AD

攻略上分 根据选项，结合特殊元素优先法、插空法、捆绑法和倍缩法计算即可求解.

【解析】对于 A，甲、乙必须相邻且乙在甲的右边，将甲、乙看成一个整体，与丙、丁、戊全排列，有 $A_4^4=24$（种）站法，**故 A 正确**；

对于 B，若甲站在最左端，乙和丙、丁、戊全排列，则有 $A_4^4=24$（种）站法，若乙站在最左端，且甲不在最右端，则有 $3A_3^3=18$（种）站法，故共有 $24+18=42$（种）不同的站法，**故 B 错误**；

对于 C，先将丙、丁、戊三人排成一排，再将甲、乙安排在三人形成的 4 个空位中，有 $A_3^3A_4^2=72$（种）站法，**故 C 错误**；

对于 D，甲、乙、丙、丁、戊五人全排列有 $A_5^5=120$（种）站法，甲、乙、丙全排列有 $A_3^3=6$（种）站法，则甲、乙、丙按从左到右的顺序排列的站法有 $\dfrac{120}{6}=20$（种），**故 D 正确. 故选 AD.**

8. 192

攻略上分 “立春”和“惊蛰”两块展板相邻，且“清明”与“惊蛰”两块展板不相邻，需要综合运用捆绑法和间接法.

【解析】由题意得,只考虑"立春"和"惊蛰"相邻时,有 $A_2^2A_5^5=240$(种)放置方式,当"立春"和"惊蛰"与"惊蛰"和"清明"均相邻时,这三个展板只有2种放置方式,即"惊蛰"在中间,"立春""清明"在两侧,此时六个节气共有 $2A_4^4=48$(种)放置方式,所以满足题意的放置方式有 $240-48=192$(种).

9. 72 【解析】已知 $\boldsymbol{a}_i=(x_i,y_i)$, $x_i,y_i\in\{-1,0,1\}$, $i=1,2,\cdots,9$,

那么向量 $\boldsymbol{a}_i$ 的所有可能情况有 $(-1,-1),(-1,0),(-1,1),(0,-1),(0,0),(0,1),(1,-1),(1,0),(1,1)$,共9种.

设每行、每列的3个向量的和为 $\boldsymbol{s}=(m,n)$,因为 $x_i,y_i\in\{-1,0,1\}$,所以 $m,n\in\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$.

又因为3行向量和等于3列向量和,且所有向量和为 $\sum\limits_{i=1}^{9}\boldsymbol{a}_i$,所以 $3\boldsymbol{s}=\sum\limits_{i=1}^{9}\boldsymbol{a}_i$,

而 $\sum\limits_{i=1}^{9}\boldsymbol{a}_i$ 的 x 分量和 y 分量都为0,所以 $\boldsymbol{s}=(0,0)$.

要使每行、每列的3个向量和为(0,0),则每行、每列的3个向量的 x 分量的和与 y 分量的和都为0.

对于 x 分量,3个数的和为0,有(-1,0,1)这一种组合情况;

对于 y 分量,3个数的和为0,也有(-1,0,1)这一种组合情况.

先确定第一行的填法,第一行的3个向量的 x 分量和 y 分量都要满足(-1,0,1)的组合,x 分量的排列有 $A_3^3=6$(种),y 分量的排列也有 $A_3^3=6$(种),所以第一行的填法有 $6\times6=36$(种).

当第一行确定后,第二行第一列的向量的 x 分量要与第一行第一列和第三行第一列的 x 分量的和为0,y 分量同理,所以第二行第一列的向量的 x 分量只有2种选择,而 x 分量确定后,该向量的 y 分量也随之确定,该向量确定后,第二行第二列、第二行第三列的向量也唯一确定,第三行的向量也就随之确定.

所以不同的填法种数是 $36\times2=72$.

6.2.3 组合 + 6.2.4 组合数

对点上分

1. B 【解析】对于 A，从六名学生中选三名学生参加数学、物理、化学竞赛，因为学科不一样，且学生各不相同，所以为排列问题，**故 A 错误**；

对于 B，有十二名学生参加植树活动，要求三人一组，可分为四组，三人一组无先后顺序，属于组合问题，**故 B 正确**；

对于 C，从 3，5，7，9 中任选两个数做指数运算，底数与指数有顺序，所以为排列问题，**故 C 错误**；

对于 D，从 1，2，3，4 中任取两个数作为点的横、纵坐标，横、纵坐标与顺序有关，所以为排列问题，**故 D 错误**.

易错警示 不能区分排列和组合致错

排列和组合的主要区别在于是否考虑元素的顺序，排列是指从 n 个不同元素中取出 m 个元素，并按照一定的顺序排列，这意味着元素的顺序是重要的，不同的排列方式会被视为不同的结果；组合是指从 n 个不同元素中取出 m 个元素，但不考虑元素的顺序，只要是相同元素被选出，无论顺序如何，都视为同一种组合.

2. ACD 【解析】对于 A，因为 $C_n^m=\dfrac{A_n^m}{A_m^m}=\dfrac{A_n^m}{m!}$，**故 A 正确**；

对于 B，$A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)$，$A_{n-1}^{m-1}=(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)$，所以 $A_n^m=nA_{n-1}^{m-1}$，**故 B 不正确**；

对于 C，$C_n^m\div C_n^{m+1}=\dfrac{n!}{m!\ (n-m)!}\div\dfrac{n!}{(m+1)!\ (n-m-1)!}=\dfrac{n!}{m!\ (n-m)!}\times\dfrac{(m+1)!\ (n-m-1)!}{n!}=\dfrac{m+1}{n-m}$，**故 C 正确**；

对于 D，$C_{n+1}^{m+1}=\dfrac{(n+1)!}{(m+1)!\ (n-m)!}=\dfrac{n+1}{m+1}\cdot$

$\frac{n!}{m!(n-m)!}=\frac{n+1}{m+1}C_n^m$，故 D 正确. 故选 ACD.

3. (1) 4　(2) 7　【解析】(1) 依题意，$xC_x^{x-1}+A_x^3=xC_x^1+A_x^3=4C_{x+1}^3$，则 $x^2+x(x-1)\cdot(x-2)=\frac{2x(x-1)(x+1)}{3}$，$x\geqslant 3$ 且 $x\in \mathbf{N}^*$，整理得 $x^2-6x+8=0$，$x\geqslant 3$ 且 $x\in \mathbf{N}^*$，解得 $x=4$.

(2) $C_3^2+C_4^2+C_5^2+\cdots+C_n^2$

$=C_3^3+C_3^2+C_4^2+C_5^2+\cdots+C_n^2-1$

$=C_4^3+C_4^2+C_5^2+\cdots+C_n^2-1$

$=C_5^3+C_5^2+\cdots+C_n^2-1$

$=C_{n+1}^3-1=55$,

因此 $C_{n+1}^3=56=C_8^3$，即 $n+1=8$，所以 $n=7$.

易错警示　在排列数 C_n^m 中，需要时刻注意 m,n 的大小关系，即 $m\leqslant n$.

4. 【解】(1) 不等式 $C_n^2-n<5$ 可化为 $\begin{cases}n\geqslant 2,\\ \frac{n(n-1)}{2}-n<5,\end{cases}$ 整理得 $\begin{cases}n\geqslant 2,\\ n^2-3n-10<0,\end{cases}$ 解得 $2\leqslant n<5$，又因为 $n\in \mathbf{N}^*$，

所以 $n=2,3,4$，

故原不等式的解集为 $\{2,3,4\}$.

(2) 由 $C_{16}^{x^2-x}=C_{16}^{5x-5}$，可得

$\begin{cases}x^2-x=5x-5,\\ 16\geqslant 5x-5\geqslant 0,\\ 16\geqslant x^2-x\geqslant 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x^2-x+5x-5=16,\\ 16\geqslant 5x-5\geqslant 0,\\ 16\geqslant x^2-x\geqslant 0,\end{cases}$

解得 $x=1$ 或 $x=3$.

5. C　【解析】因为必须包含象鼻山，所以需从剩下的 3 个景点中选择 2 个景点与象鼻山组合，有 $C_3^2=3$（种）选法，

提示：优先考虑限制元素

又因为游览顺序可以不同，所以共有 $3\times A_3^3=3\times 6=18$（种）不同的游览路线. 故选 C.

6. C　【解析】若 A 参加竞赛，则参赛方案有 $C_4^3C_2^1A_3^3=48$（种）；若 A 不参加竞赛，则参赛方案有 $A_4^4=24$（种）. 故不同的参赛方案有 $48+24=72$（种）.

一题多解 先从除了 A 以外的 4 名学生中选择 2 名参加物理、化学竞赛，有 A_4^2 种选法，再从余下的 3 名学生中选择 2 名参加数学、英语竞赛，有 A_3^2 种选法，因此共有 $A_4^2A_3^2=72$(种)不同的参赛方案. **故选 C.**

方法总结 **解决"含"与"不含"问题的方法**

"含"，则先将这些元素取出，再用剩下的元素补足；"不含"，则先将这些元素剔除，再从剩下的元素中选取.

7. C 【**解析**】小组中有 1 名女医生的选法有 $C_5^1C_6^2=75$(种)；小组中有 2 名女医生的选法有 $C_5^2C_6^1=60$(种)；小组中有 3 名女医生的选法有 $C_5^3=10$(种). 所以共有 $75+60+10=145$(种)选法. **故选 C.**

一题多解 从 11 名医生中选出 3 名医生，且至少有 1 名女医生，等价于从 11 名医生中选出 3 名医生，再去掉 3 名医生都是男医生的情况，

提示："正面"分类情况超过"反面"分类情况时，采用正难则反的思想可以简化问题

故不同的选法共有 $C_{11}^3-C_6^3=165-20=145$(种).

方法总结 **解决"至多""至少"问题的方法**

解这类题必须理解"至多""至少"这两个关键词的含义，谨防重复与漏解，用直接法和间接法都可以求解，通常用直接法进行分类讨论，当直接法分类情况过多时，则采用正难则反的思想，用间接法处理.

8. 90 【**解析**】①若只报 2 个项目，由题

意知,有 $C_5^1C_4^1=20$(种)报名方案.

②若报 3 个项目,由题意知,有 $C_5^2C_4^1+C_5^1C_4^2=70$(种)报名方案.

故每位同学的报名方案共有 20+70=90(种).

9. 15

攻略上分 相同元素指定数量的分组分配问题,可以通过预先分配多余量转化为常规问题,再采用隔板法求解.

【解析】由题,先给乙 1 个球,丙 2 个球,

提示:预先分配多余量

此时题目转化为有 7 个相同的小球,全部分给甲、乙、丙 3 人,且每人至少分到 1 个球.

此时可将 7 个球排成 1 列,在中间的 6 个空中插入 2 个隔板,即不同的分法共有 $C_6^2=15$(种).

一题多解 先分给甲 1 个球,乙 2 个球,丙 3 个球,还剩下 4 个球.

①4 个球分给 1 个人,有 3 种分法.

②4 个球分给 2 个人,有两种情况,1 个人 3 个、另 1 个人 1 个,有 $A_3^2=6$(种)分法;2 个人都是 2 个,有 3 种分法.

③4 个球分给 3 个人,只有 1,1,2 这种情况,有 3 种分法.

由分类加法计数原理可得共有 3+6+3+3=15(种)不同的分法.

10. 21

攻略上分 由于每只羊羔的价格均为 300 元,则共有 8 个购买羊羔的指标,可看作 8 个无差别的小球,故问题等价于把 8 个无差别的小球装入三个不同的盒子中,每个盒子至少装 1 个小球,用隔板法处理.

【解析】由于每只羊羔的价格均为 300 元,则共有 8 个购买羊羔的指标,可以看成 8 个无差别的小球,三种不同的羊羔可以看成三个编号分别为 1,2,3 的盒子,

提示：准确判断需要分配的相同元素是谁

则问题转化为把 8 个无差别的小球装入三个不同的盒子中，每个盒子至少装 1 个小球.

用隔板法，8 个小球共有 7 个空，装进三个不同的盒子中，故插入 2 个隔板，共有 $C_7^2=21$（种）方法，故共有 21 种不同的购买方案.

11. 455　969

攻略上分　本题是组合的综合应用，关于不定方程的解的问题，此类问题通常是求和的形式，可以将其看作相同元素的分组分配问题，采用隔板法求解.

【解析】可将 16 理解为 16 个 1 相加. 而 x,y,z,w 相当于四个盒子，每个盒子里装入若干个 1.

对于第一个空，将 16 个 1 排成一排，形成 15 个空隙，

在空隙中插入 3 个隔板，将 16 个 1 截为 4 个部分，每个部分的和对应四元方程的正整数解，则有 $C_{15}^3=455$（组）正整数解.

提示：将方程正整数解的组数，看成相同元素分组分配问题，采用隔板法

对于第二个空，由 $x+y+z+w=16$ 得 $(x+1)+(y+1)+(z+1)+(w+1)=20$，

则可转化为将 20 个 1 排成一排，在中间的 19 个空隙中插入 3 个隔板，

提示：转化为方程正整数解的组数，采用隔板法求解即可

可得原方程共有 $C_{19}^3=969$（组）非负整数解.

方法总结　$x+y+z=n\ (n\geqslant 3, n\in \mathbf{N}^*)$ 正整数解的组数问题

此类问题可以转化为将 n 个相同的物品分成 3 组（若方程为 $x_1+x_2+\cdots+x_m=n(n\geqslant m, n\in\mathbf{N}^*)$，则分成 m 组），每组至少有 1 个，有多少种不同分法的问题，本质上是相同元素的分组分配问题，常用隔板法解决.

12. A 【解析】先将 4 名同学分为三组，每组的人数分别为 2,1,1，再将这三组同学分配到 3 个班，由分步乘法计数原理可知，不同的分配方式种数为 $C_4^2A_3^3=6\times6=36$. **故选** A.

13. B

攻略上分 由题知，需把 6 名航天员分成三组，每组 2 人，再把这三组分配到三个舱中，这属于不同元素分组分配问题.

【解析】先把 6 名航天员分成三组，每组 2 人，有 $\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}$ 种方法，再把这三组分配到三个舱中，每舱一组，有 A_3^3 种方法，所以不同的安排方法共有 $\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}\cdot A_3^3=90$（种）. **故选** B.

一题多解 ①先从 6 名航天员中选出 2 名分配到天和核心舱，有 C_6^2 种选法；

②再从余下的 4 名航天员中选出 2 名分配到问天实验舱，有 C_4^2 种选法；

③将余下的 2 名航天员分配到梦天实验舱，有 C_2^2 种选法.

根据分步乘法计数原理得，不同的安排方法有 $C_6^2C_4^2C_2^2=90$（种）.

方法总结 **完全平均的分组分配问题**

（1）若只分组不分配，则还需要除以这几组中组内元素数相等的组数的全排列数，消去重复；

（2）若分组且分配，则可先分组再分配，或用分步乘法计数原理解题.

14. AB

攻略上分 本题为典型的不同元素分组分配问题，在求解过程中需要注意是否有均分情况的出现，如有均分，需要消除组内的顺序，避免重复计数.

【解析】对于 A，甲工地先从 6 辆工程

车中分 1 辆，有 C_6^1 种方法，乙工地再从剩余的 5 辆工程车中分 2 辆，有 C_5^2 种方法，最后的 3 辆分给丙地，有 C_3^3 种方法，所以不同的分配方式有 $C_6^1C_5^2C_3^3=60$（种），**故 A 正确；**

提示：不平均分组的定向分配问题

对于 B，6 辆工程车先分给甲、乙两个工地每个工地各 2 辆，有 $C_6^2C_4^2$ 种方法，剩余 2 辆分给丙、丁两个工地每个工地各 1 辆，有 A_2^2 种方法，所以不同的分配方式有 $C_6^2C_4^2A_2^2=180$（种），**故 B 正确；**

提示：部分平均分组的定向分配问题

对于 C，先把 6 辆工程车分成 3 组：4 辆、1 辆、1 辆，有 $\frac{C_6^4C_2^1C_1^1}{A_2^2}$ 种方法，再分配给甲、乙、丙三个工地，所以不同的分配方式有 $\frac{C_6^4C_2^1C_1^1}{A_2^2}A_3^3=90$（种），**故 C 错误；**

提示：部分平均分组的不定向分配问题

对于 D，先把 6 辆工程车分成 4 组：2 辆、2 辆、1 辆、1 辆，有 $\frac{C_6^2C_4^2C_2^1C_1^1}{A_2^2A_2^2}$ 种分组方法，再分给甲、乙、丙、丁四个工地，所以不同的分配方式有 $\frac{C_6^2C_4^2C_2^1C_1^1}{A_2^2A_2^2}\cdot A_4^4=1\ 080$（种），**故 D 错误. 故选 AB.**

关键点拨 处理分组分配问题的注意事项

（1）关注被分配的元素是否相同（如“名额”是相同元素，“老师”是不同元素），是否需要分配到指定的位置（即定向分配或不定向分配）；

（2）处理不同元素分组分配问题要注意先分组，再分配；

（3）分组时要注意是否均分，均分的要去掉重复计数的情况.

15.【解】（1）由题可知，第 1 次和第 4 次检测为次品，第 2，3 次检测为正品，则

共有 $A_4^2A_2^2=24$（种）不同的抽法.

（2）一共抽取 5 次检测结束，则有两种情况.

①前 4 次有 1 次抽到次品，剩下 3 次抽到正品，第 5 次抽到正品，有 $C_2^1C_4^1A_4^4=192$（种）不同的抽法.

提示：注意 6 件产品均不相同，正品和次品内部也有顺序

②前 4 次有 1 次抽到次品，剩下 3 次抽到正品，第 5 次抽到次品，有 $C_4^1A_2^2A_4^3=192$（种）不同的抽法.

共有 $192+192=384$（种）不同的抽法.

（3）至多检测 4 次就能找到所有次品有如下几种情况.

①第 1，2 次抽到的全是次品，检测结束，不同的抽法种数为 $A_2^2=2$.

②前 2 次有 1 次抽到次品，第 3 次抽到次品，检测结束，不同的抽法种数为 $C_4^1C_2^1A_2^2=16$.

③前 3 次有 1 次抽到次品，第 4 次抽到次品，检测结束，不同的抽法种数为 $C_2^1C_4^2A_3^3=72$.

④前 4 次全部抽到正品，不同的抽法种数为 $A_4^4=24$.

共有 $2+16+72+24=114$（种）不同的抽法.

（4）第 1 次抽到次品，第 3 次抽到正品，则第 2 次一定抽到正品，且至少要抽 4 次才能结束检测.

①若最终以正品结束，则共抽 5 次，即第 1 次为次品，其余 4 次均为正品，不同的抽法种数为 $C_2^1A_4^4=48$.

②若最终以次品结束，则有两种情况.

a. 共抽 4 次，第 1，4 次为次品，第 2，3 次为正品，不同的抽法种数为 $A_2^2A_4^2=24$.

b. 共抽 5 次，第 1，5 次为次品，第 2，3，4 次为正品，不同的抽法种数为 $A_2^2A_4^3=48$.

提示：正品的数量为 4，即次品不可能在第 6 次出现

综上，共有 $48+24+48=120$（种）不同的抽法.

关键点拨 **处理排列与组合的综合问题的注意事项**

(1)无序问题用组合,有序问题用排列;

(2)涉及元素或位置的性质要分类,涉及事情发生的过程要分步;

(3)解题思路为先特殊后一般.

能力上分

1. A　【解析】从 3 名男厨师和 2 名女厨师中选出 2 人,分别做调料师和营养师,共有 $C_5^2A_2^2=20$(种)不同选法,其中没有女厨师被选中的选法有 $C_3^2A_2^2=6$(种),故至少有 1 名女厨师被选中的不同选法有 $20-6=14$(种). **故选 A.**

2. A

攻略上分　将 16 个名额(16 个相同的元素)分配给 3 个年级,每个年级至少安排 1 名学生,是相同元素分组分配问题,采用隔板法.

【解析】取 16 个元素排成一排,在形成的 15 个空隙中选 2 个插入隔板,这样就把 16 个元素分成 3 个部分,这 3 个部分的元素个数分别对应这 3 个年级的学生名额,则名额的分配方案的种数与隔板插入方法的种数相等. 因为隔板插入方法共有 $C_{15}^2=105$(种),所以名额的分配方案共有 105 种. **故选 A.**

3. C

思路导引　先从 5 名男同学中选 3 人,再分前 3 名同学中有 1 名女同学、2 名女同学两种情况讨论,可得总安排方法数.

【解析】先从 5 名男同学中选 3 人,有 C_5^3 种情况.

若前 3 名同学中,只有 1 名女同学,则从 3 名男同学中选 2 名,有 C_3^2 种情况,从 2 名女同学中选 1 名,有 C_2^1 种情况,再将前 3 人排成一列,有 A_3^3 种

情况，

最后排剩下的 2 人，有 $A_2^2=2$(种)情况，则前 3 名同学中，只有 1 名女同学的安排方法有 $C_5^3C_3^2C_2^1A_3^3A_2^2=720$(种).

若前 3 名同学中，有 2 名女同学，则先从 3 名男生中选 1 名，有 C_3^1 种情况，

再将前 3 人排成一列，有 A_3^3 种情况，

最后排剩下 2 人，有 A_2^2 种情况，

则前 3 名同学中，有 2 名女同学的安排方法有 $C_5^3C_3^1A_3^3A_2^2=360$(种).

故不同的安排方法有 $720+360=1\ 080$(种). **故选 C.**

4. ABD 【解析】对于 A，不选主食 A 的方法种数为 $C_3^2C_5^2=30$，A **正确**；

对于 B，主食 B 和配菜 b 都选的方法种数为 $C_3^1C_4^1=12$，B **正确**；

对于 C，配菜 c，d 至少选 1 种的方法种数为 $C_4^2(C_2^2+C_2^1C_3^1)=42$，C **错误**；

对于 D，主食 D，配菜 d，e 只选 2 种的方法种数为 $C_3^1C_2^1C_3^1+C_3^2C_2^2=21$，D **正确.**

故选 ABD.

5. 34 【解析】因为 $C_{14}^m=C_{14}^{m+2}$，所以 $m+(m+2)=14$ 或 $m=m+2$(无解，舍去)，

解得 $m=6$，

所以 $C_3^2+C_4^2+C_5^2+C_6^2=C_3^3+C_3^2+C_4^2+C_5^2+C_6^2-1=C_4^3+C_4^2+C_5^2+C_6^2-1=C_5^3+C_5^2+C_6^2-1=C_6^3+C_6^2-1=C_7^3-1=34.$

提示：配一个 C_3^3 可以用组合数性质 $C_n^m+C_n^{m+1}=C_{n+1}^{m+1}$ 化简

6. 88

攻略上分 先对 A 选择的景点进行分类，然后将剩余景点分配给 B，C 两人，是分组分配问题.

【解析】当 A 只选择北京故宫、西安兵马俑中的 1 个，且只去 1 个景点时，有 $C_2^1=2$(种)选择，再将其他 4 个景点分给 B，C，

提示：分组时有 1，3 分组与 2，2 分组两种情况

有 $\left(C_4^1C_3^3+\dfrac{C_4^2C_2^2}{A_2^2}\right)A_2^2=14$(种)选择，故共有 $2\times14=28$(种)打卡方案；

当 A 只选择北京故宫、西安兵马俑中的 1 个，且去 2 个景点时，有 $C_2^1C_3^1=$

6(种)选择,再将其他 3 个景点分给 B,C,有 $C_3^1C_2^2A_2^2=6$(种)选择,故共有 $6\times6=36$(种)打卡方案;

当 A 只选择北京故宫、西安兵马俑中的 1 个,且去 3 个景点时,有 $C_2^1C_3^2=6$(种)选择,再将其他 2 个景点分给 B,C,有 $A_2^2=2$(种)选择,故共有 $6\times2=12$(种)打卡方案;

当 A 选择北京故宫、西安兵马俑这 2 个且只去 2 个景点时,只需将其他 3 个景点分给 B,C,有 $C_3^1C_2^2A_2^2=6$(种)打卡方案;

当 A 选择北京故宫、西安兵马俑且去 3 个景点时,有 $C_3^1=3$(种)选择,只需将其他 2 个景点分给 B,C,有 $A_2^2=2$(种)选择,故共有 $3\times2=6$(种)打卡方案.

综上,共有 $28+36+12+6+6=88$(种)不同的打卡方案.

7. 390

攻略上分 将 6 名大学生分成三组分别去三所不同的学校,保证每所学校至少有 1 名大学生去,且每名大学生只能去一所学校,是分组分配问题.

【解析】将这 6 名大学生分成三组,每组的人数分别为 2,2,2 或 4,1,1 或 3,2,1,分以下几种情况讨论:

若三组人数分别为 2,2,2,且甲、乙不在同一组,其反面是甲、乙在同一组,

提示:正难则反

此时不同的安排方案种数为 $\left(\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}-\frac{C_4^2C_2^2}{A_2^2}\right)A_3^3=(15-3)\times6=72$;

若三组人数分别为 4,1,1,且甲、乙不在同一组,其反面是甲、乙在同一组,

此时不同的安排方案种数为 $\left(\frac{C_6^4C_2^1C_1^1}{A_2^2}-\frac{C_4^2C_2^1C_1^1}{A_2^2}\right)A_3^3=(15-6)\times6=54$;

若三组人数分别为 3,2,1,且甲、乙不在同一组,其反面是甲、乙在同一组,即甲、乙所在的一组有 2 人或 3 人,

此时不同的安排方案种数为 $(C_6^3C_3^2-C_4^3-C_4^1C_3^2)A_3^3=(60-4-12)\times6=44\times6=264$.

综上所述，不同的安排方案种数为 $72+54+264=390$.

8.【解】(1) 第一步，将甲和乙的相同课程选好，有 C_6^1 种情况，

第二步，再将甲和乙的不同课程选好，有 $C_5^2\times A_2^2$ 种情况，

第三步，因为丙和甲、乙的课程都不同，所以丙的选法有 C_3^2 种情况，

因此所有选课种数为 $C_6^1C_5^2A_2^2C_3^2=360$.

(2) ①当 A 只任教一门课程时，先安排 A 任教，有 C_5^1 种方法，

再从剩下五门课程中安排 B 的任教课程，有 C_5^1 种方法，

接下来剩余四门课程中必有两门课程由同一名教师讲解，共有 $C_4^2\times A_3^3$ 种安排方法，

所以当 A 只任教一门课程时，共有 $C_5^1\times C_5^1\times C_4^2\times A_3^3=900$(种)安排方法.

②当 A 任教两门课程时，先安排 A 任教，有 C_5^2 种方法，这样六门课程共有 $C_5^2\times A_4^4=240$(种)安排方法.

综上，所有课程的安排方法有 $900+240=1\ 140$(种).

6.1+6.2 节测上分

1. D 【解析】对于 A，因为 $A_9^5=9\times8\times7\times6\times5=15\ 120$，$5A_8^4=5\times8\times7\times6\times5=8\ 400$，所以 $A_9^5\neq5A_8^4$，错误；

对于 B，因为 $A_4^3+A_4^4=24+24=48$，$A_5^4=120$，所以 $A_4^3+A_4^4\neq A_5^4$，错误；

对于 C，因为 $C_{13}^7=1\ 716$，$C_{13}^5=1\ 287$，所以 $C_{13}^7\neq C_{13}^5$，错误；

对于 D，因为 $3C_8^3=3\times\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=168$，$8C_7^2=8\times\dfrac{7\times6}{2\times1}=168$，所以 $3C_8^3=8C_7^2$，正确. **故选** D.

2. D 【解析】根据题意，满足条件的五位数有以下两类：

第一类，这五个数字为 0,0,0,1,2，首位不能是 0，所以有 $C_2^1\cdot C_4^1=8$(个)；

第二类，这五个数字为 0,1,1,2,2，首位不能是 0，所以有 $C_4^1\cdot C_4^2=24$(个).

所以满足题意的五位数有 $8+24=32$(个). **故选** D.

3. B 【解析】将甲、乙、丙 3 人视为一个整体与丁、戊排列，有 $A_3^3A_3^3$ 种方法，

当甲、乙、丙相邻，丙不在甲、乙的中间，丙、丁相邻时，甲、乙、丙、丁视为一个整体与戊排列，有 $A_2^2A_2^1A_2^2$ 种方法.

提示：先排甲、乙有 A_2^2 种方法，丙在甲、乙左边或右边且 3 人相邻有 A_2^1 种方法，丁与丙相邻有 1 种方法，再将这个整体与戊排列有 A_2^2 种方法

所以不同的座位排列方法种数是 $A_3^3A_3^3-A_2^2A_2^1A_2^2=28$. **故选 B.**

4. C 【解析】因为任务有 4 个，人只有 3 个，结合题意可知有 1 个人负责 2 个任务. 若甲负责 2 个任务，因为甲不负责 A 任务，所以有 C_3^2 种分配方法，剩下的任务有 A_2^2 种分配方法，则此时的分配方法共有 $C_3^2A_2^2=6$(种).

提示：从有限制的元素入手讨论

若甲负责 1 个任务，因为甲不负责 A 任务，所以有 C_3^1 种分配方法，剩下的任务有 $C_3^2A_2^2$ 种分配方法，则此时的分配方法共有 $C_3^1C_3^2A_2^2=18$(种).

综上，满足题意的分配方法共有 $6+18=24$(种). **故选 C.**

5. AC 【解析】对于 A：从 4 名男生和 3 名女生中选派 3 人参加 A,B,C 活动，则有 $A_7^3=7\times6\times5=210$(种)不同的安排方法，**故 A 正确**；

对于 B：若男生甲必须参加其中的一项活动，则先将甲安排到一项活动中有 C_3^1 种方法，再将剩下的两项活动安排给剩下 6 人中的 2 人，有 A_6^2 种方法，则共有 $C_3^1A_6^2=90$(种)不同的安排方法，**故 B 错误**；

对于 C：若 3 人中必须既有男生又有女生，则有 $(C_3^1C_4^2+C_3^2C_4^1)A_3^3=30\times6=180$(种)不同的安排方法，**故 C 正确**；

对于 D：小红必须参加且不能参加 A 活动，则安排小红参加 B,C 活动中的一项，有 C_2^1 种方法，剩下两项活动安排给剩下 6 人中的 2 人，则有 A_6^2 种方法，所以共有 $C_2^1A_6^2=60$(种)不同的安排方法，**故 D 错误. 故选 AC.**

6. 120 【解析】先排区域 1,3,5，此时从 4 种鲜花中任选 3 种全排列，故共有 $A_4^3=24$(种)方法.

接下来排区域 2,4,6，

若 4,5 同色，1,2 同色，此时区域 6 有 2 种选择；

若4,5同色,1,2不同色,此时区域2只有1种选择,区域6也只有1种选择;

若4,5不同色,此时1,2只能同色,则区域6有2种选择,

故排区域2,4,6共有2+1+2=5(种)方法.

提示:分类加法计数原理

因此摆放鲜花的不同方法种数为24×5=120.

提示:分步乘法计数原理

7. 16

思路导引 先考虑3个相同的小球放入4个不同的盒子中的情形,再减去把3个相同的小球放在同1个盒子的情形,结合隔板法和间接法可求得结果.

【解析】将3个相同的小球放入4个不同的盒子中,可知其中有空盒,

可考虑在每个盒子中各加1个球,将7个相同的小球放入4个不同的盒子,每个盒子中至少有1个球,

则不同的方法种数为 $C_6^3=20$.

接下来考虑把3个相同的小球放在同1个盒子的情形,有4种情况.

由间接法可知,不同的方法种数为20−4=16.

8. 150 【解析】先将5名学生分成三组,每组人数有1,1,3或2,2,1两种情况,

则不同的分组方法有 $\dfrac{C_5^1C_4^1C_3^3}{A_2^2}+\dfrac{C_5^2C_3^2C_1^1}{A_2^2}$ 种,

提示:部分平均分组

再将这3组学生分到3个兴趣小组,有 A_3^3 种不同的方法,

由分步乘法计数原理可知这5名学生不同的选择方法有 $\left(\dfrac{C_5^1C_4^1C_3^3}{A_2^2}+\dfrac{C_5^2C_3^2C_1^1}{A_2^2}\right)A_3^3=150$(种).

9. 410

思路导引 由题意知,x_1,x_2 除以3的余数相同,按照 x_1,x_2 被3整除,x_1,x_2 被3除余1,x_1,x_2 被3除余2分类讨论求解即可.

【解析】因为$\frac{x_1+2x_2+3x_3}{3}\in \mathbf{Z}$，所以 x_1+2x_2 能被 3 整除，所以 x_1,x_2 除以 3 的余数相同.

M 中的元素能被 3 整除的有 3，6，9，12，15，被 3 除余 1 的有 1，4，7，10，13，16，被 3 除余 2 的有 2，5，8，11，14.

当 x_1,x_2 被 3 整除时，则 x_1,x_2,x_3 从被 3 整除的 5 个数中选 3 个，或 x_1,x_2 从被 3 整除的 5 个数中选 2 个，x_3 从其余 11 个数中选择，所以有 $C_5^3+C_5^2\times11=120$（种）方法.

当 x_1,x_2 被 3 除余 1 时，则 x_1,x_2,x_3 从被 3 除余 1 的 6 个数中选 3 个，或 x_1,x_2 从被 3 除余 1 的 6 个数中选 2 个，x_3 从其余 10 个数中选择，所以有 $C_6^3+C_6^2\times10=170$（种）方法.

当 x_1,x_2 被 3 除余 2 时，则 x_1,x_2,x_3 从被 3 除余 2 的 5 个数中选 3 个，或 x_1,x_2 从被 3 除余 2 的 5 个数中选 2 个，x_3 从其余 11 个数中选择，所以有 $C_5^3+C_5^2\times11=120$（种）方法.

所以满足条件的集合 A 共有 $120+170+120=410$（个）.

10.【解】（1）先排歌曲节目，有 2 种排法，再将剩下的 5 个节目全排列，有 $A_5^5=120$（种）排法，故共有 $2A_5^5=240$（种）排法.

（2）将 3 个舞蹈节目看成一个整体，其内部有 $A_3^3=6$（种）排法；再将剩下的 4 个节目全排列，有 $A_4^4=24$（种）排法；最后，将 3 个舞蹈节目整体放入剩下的 4 个节目产生的不含两端的 3 个空中，有 3 种排法，故共有 $6\times24\times3=432$（种）排法.

（3）将舞蹈、歌曲节目分别看成一个整体并优先安排，有 $2A_3^3A_2^2=24$（种）排法；再将小品放入舞蹈、歌曲产生的 3 个空中，有 A_3^2 种排法，则共有 $24A_3^2=144$（种）排法.

（4）将新增的 2 个节目放入已经排好的 7 个节目产生的 8 个空中，

若 2 个节目放入同 1 个空中，则有 $8A_2^2=16$（种）排法，

若 2 个节目不放入同 1 个空中，则有 $A_8^2=56$（种）排法，

故共有 $16+56=72$（种）排法.

专题上分 1 排列、组合综合问题

1. D

攻略上分 用 4 种不同的颜色涂四个区域，有公共边的区域涂不同颜色，是按区域的相邻关系分步的涂色问题.

【解析】先涂区域②，则区域②有 4 种选择，区域③有 3 种选择，区域①和④各有 2 种选择，由分步乘法计数原理可知，不同的涂法有 $4\times3\times2\times2=48$（种）. **故选** D.

2. B

攻略上分 给一个四棱锥的五个顶点涂色，有四种不同的颜色可供选择，是按颜色的使用情况分类的涂色问题.

【解析】若用四种颜色，则 A，C 同色或 B，D 同色，则涂色方案有 $2A_4^4=48$（种）；

若用三种颜色，则 A，C 同色且 B，D 同色，则涂色方案有 $A_4^3=24$（种）.

故不同的涂色方案有 $48+24=72$（种）.

故选 B.

3. B

攻略上分 给证明图形的六个区域涂色，有三种颜色可用，是结合区域和颜色的综合涂色问题.

【解析】按照 A，E 是否同色，分两类：

(1) A，E 不同色，先给 B，C 涂色，有 A_3^2 种涂色方法，再根据 A，E 是否用余下的第三种颜色分两种情况：

① A，E 不用第三种颜色，即 A 用 C 的颜色，E 用 B 的颜色，则 D 有 C_2^1 种涂色方法，F 有 C_2^1 种涂色方法，则共有 $A_3^2\cdot C_2^1\cdot C_2^1$ 种涂色方法.

② A，E 用第三种颜色，若 A 用第三种颜色，则 E 用 B 的颜色，D 有 C_2^1 种涂色方法，F 有 C_2^1 种涂色方法；若 E 用第三种颜色，则 A 用 C 的颜色，D 有 C_2^1

种涂色方法，F 有 C_2^1 种涂色方法，则共有 $2\cdot A_3^2\cdot C_2^1\cdot C_2^1$ 种涂色方法.

所以 A,E 不同色的涂色方法有 $A_3^2(C_2^1\cdot C_2^1+2\cdot C_2^1\cdot C_2^1)=72$(种).

(2)A,E 同色，先给 B,C 涂色，有 A_3^2 种涂色方法，则 A,E 只能用第三种颜色，D 有 C_2^1 种涂色方法，F 有 C_2^1 种涂色方法，所以 A,E 同色的涂色方法有 $A_3^2C_2^1\cdot C_2^1=24$(种).

综上，不同的涂色方法有 $72+24=96$(种).

4. C 【解析】由题设，千位可选 7，8，个位可选 1，5，7，其他两个数在余下的数字中任选 2 个.

若千位选 7，则个位有 2 种选法，其他两个数有 $A_4^2=12$(种)选法；

若千位选 8，则个位有 3 种选法，其他两个数有 $A_4^2=12$(种)选法；

所以共有 $2\times12+3\times12=60$(个)大于 7 000 的奇数. **故选 C.**

5. C 【解析】由题可得，若“凸数”中有 0，则 0 在“凸数”的个位数，剩下两位数有大小关系限制，相当于从 5 个数中选 2 个，有 C_5^2 种情况；

若“凸数”中没有 0，则先从剩下 5 个数中，选 3 个，有 C_5^3 种可能，

由于十位数最大，个位数与百位数没有限制，故将 3 个数中最大的数放在十位，

剩下 2 个数有 2 种安排方法，故共有 $2C_5^3$ 种情况.

故符合题意的“凸数”的个数为 $C_5^2+2C_5^3=30$. **故选 C.**

6. CD 【解析】对于 A，没有重复数字的六位数应由 0，1，2，3，4，5 组成，共有 $C_5^1A_5^5=600$(个)，**故 A 错误；**

对于 B，没有重复数字的六位偶数有两类情况，末位为 0 的有 $A_5^5=120$(个)，末位不为 0 的有 $C_2^1C_4^1A_4^4=192$(个)，共有 $120+192=312$(个)，**故 B 错误；**

对于 C，没有重复数字的六位数有 600 个，有两个 1 的六位数有 $A_6^4+C_4^3C_5^1A_5^3=1\ 560$(个)，有三个 1 的六位数有 $C_4^3A_6^3+C_4^2C_5^1A_5^2=1\ 080$(个)，共有 600+

$1\ 560+1\ 080=3\ 240$(个),**故 C 正确**;

对于 D,先排 0,2,3,4,5,首位为 0 的有 A_4^4 个,首位不为 0 的有 $C_4^1A_4^4$ 个,再插入 1,1,1,共有 $A_4^4C_5^2+C_4^1A_4^4C_6^3=240+1\ 920=2\ 160$(个),**故 D 正确.**

提示:当首位为 0 时,必须在 0 前插入 1

故选 CD.

7. A 【解析】完成这件事情可分三步:

第一步:高一年级选择一条线路,有 5 种选法;

第二步:高二年级选择一条线路,有 5 种选法;

第三步:高三年级选择一条线路,有 5 种选法.

根据分步乘法计数原理,完成这件事情的方法有 $5\times5\times5=5^3$(种). **故选 A.**

8.【解】(1)将 4 封不同的信放到 3 个不同的信箱中,有 $3^4=81$(种)放法.

(2)将 4 封不同的信放到 3 个不同的信箱中,每个信箱至少有 1 封信,

则将 4 封信分成 1,1,2 三组,共有 $\dfrac{C_4^1C_3^1}{A_2^2}=6$(种)分法,再分给 3 个信箱,有 $A_3^3=6$(种)分法,所以共有 $6\times6=36$(种)放法.

(3)将 4 封标有 A,B,C,D 的信放到 4 个标有 A,B,C,D 的信箱中,每个信箱放一封信,先确定一组所标字母相同有 $C_4^1=4$(种)情况,其余的所标字母全部不同均有 2 种情况,则共有 $4\times2=8$(种)放法.

9. B 【解析】甲地经乙地到丁地的路线有 $1\times3=3$(条);甲地经丙地到丁地的路线有 $3\times4=12$(条). 故从甲地到丁地路线条数为 $3+12+n=15+n$,所以 $15+n=20$,解得 $n=5$. **故选 B.**

10. ABD

思路导引 结合分步乘法计数原理利用组合数判断 A,C. 结合插空法判断 B. 分析当 $k=1,2,3$ 时哪几次的移动方向相同,结合从点 A 到点 B 需要向右移动 5 次,向上移动 5 次判断 D.

【解析】对于 A,由题可知,无论怎样

走，一定移动 10 次，其中 5 次向上移动，5 次向右移动，故移动的方法共有 $C_{10}^5C_5^5=252$（种），**故 A 正确**；

对于 B，仅有 4 次连续向上移动的方法有 $A_6^2=30$（种），**故 B 正确**；

对于 C，若经过点 M，则前 3 次中向右移动 2 次向上移动 1 次，后 7 次移动中向右移动 3 次向上移动 4 次，所以移动的方法有 $C_3^2C_7^3=105$（种），**故 C 错误**；

对于 D，由题可知，当 $k=1$ 时，第 1，2 次的移动方向相同，当 $k=2$ 时，第 3，4，5 次的移动方向相同，当 $k=3$ 时，第 6，7，8，9 次的移动方向相同，因为需要向右移动 5 次，向上移动 5 次，所以第 1～5 次的移动方向相同，则移动的方法有 2 种，**故 D 正确. 故选 ABD.**

11. C 【解析】先挂 2 盏吊灯，有 $A_2^2=2$（种）挂法，再在 2 盏吊灯之间挂 3 盏纱灯，有 $A_3^3=6$（种）挂法，最后将宫灯插空挂.

当 4 盏宫灯分成 2，2 两份插空时，有 $C_4^2-1=5$（种）挂法；当 4 盏宫灯分成 1，1，2 三份插空时，有 $C_4^3C_3^1=12$（种）挂法；当 4 盏宫灯分成 1，1，1，1 四份插空时，有 1 种挂法.

所以共有 $2\times6\times(5+12+1)=216$（种）不同的挂法. **故选 C.**

12. A 【解析】由题意得，甲、乙都去有 C_5^2 种选择，甲、乙都不去有 C_5^4 种选择.

又每个工地要求至少有一名工程师，所以分配方案为 2，1，1，

将 4 名工程师分到 3 个不同的工地有 $\frac{C_4^2C_2^1C_1^1}{A_2^2}\cdot A_3^3$ 种方案，

所以不同分配方法的种数为 $(C_5^2+C_5^4)\frac{C_4^2C_2^1C_1^1}{A_2^2}\cdot A_3^3=540$. **故选 A.**

13. **攻略上分** 易知本题第（3）问，若直接算需要考虑语文小组中的 1 人站第一排、2 人站第一排、3 人站第一排三种不同情况，较为繁琐，所以利用正难则反的方法，只需用 7 人的总排列数减去 4 人均在第二排的排列数即可.

【解】(1)数学小组 3 人站在第一排，排法有 A_3^3 种，

语文小组 4 人站第二排，排法有 A_4^4 种，

故不同的排法种数为 $A_3^3 \cdot A_4^4 = 6 \times 24 = 144$.

(2)根据题意，分甲、乙站在第一排和第二排两种情况.

①甲、乙站在第一排.

选 1 人在甲、乙中间有 C_5^1 种方法，甲、乙二人有 A_2^2 种排法，第二排 4 人有 A_4^4 种排法，

则有 $C_5^1 \cdot A_2^2 \cdot A_4^4 = 5 \times 2 \times 24 = 240$(种)排法.

②甲、乙站在第二排.

选 2 人与甲、乙站在第二排有 C_5^2 种方法，这 2 人有 A_2^2 种排法，甲、乙二人插空有 A_3^2 种排法，第一排 3 人有 A_3^3 种排法，

则有 $C_5^2 \cdot A_2^2 \cdot A_3^2 \cdot A_3^3 = 10 \times 2 \times 6 \times 6 = 720$(种)排法.

故不同的排法种数为 $240+720=960$.

(3)语文小组成员分成两排站(每排至少站 1 人)等价于将 7 人排成两排(第一排站 3 人，第二排站 4 人)去掉语文小组成员全在第二排的情况，即不同的排法种数为 $A_7^7 - A_3^3 \cdot A_4^4 = 5\ 040 - 144 = 4\ 896$.

提示：利用间接法

14. **攻略上分** 2 名老师傅既能当车工又能当钳工，即该题具备一类满足两项性质的特殊元素，解决此类问题时，必须要考虑这类特殊元素"含"还是"不含"，若"含"，则该元素以什么身份呈现.

【解】设 A,B 代表 2 位老师傅. A,B 都不在内的选派方法有 $C_5^4C_4^4 = 5$(种)，

提示：分情况利用组合数求解

A,B 都在内且当钳工的选派方法有 $C_2^2C_5^2C_4^4 = 10$(种)，

A,B 都在内且当车工的选派方法有 $C_2^2C_5^4C_4^2 = 30$(种)，

A,B 都在内且 1 人当钳工，1 人当车工的选派方法有 $A_2^2C_5^3C_4^3 = 80$(种)，

A,B 有 1 人在内且当钳工的选派方法

有 $C_2^1C_5^3C_4^4=20$(种),

A,B 有 1 人在内且当车工的选派方法有 $C_2^1C_5^4C_4^3=40$(种),

所以共有 $5+10+30+80+20+40=185$(种)选派方法.

一题多解(**方法一:根据男钳工被选中的数量分类讨论**)5 名男钳工中有 4 名被选中的方法有 $C_5^4C_4^4+C_5^4C_4^3C_2^1+C_5^4C_4^2C_2^2=75$(种),

5 名男钳工中有 3 名被选中的方法有 $C_5^3C_2^1C_4^4+C_5^3C_4^3A_2^2=100$(种),

5 名男钳工中有 2 名被选中的方法有 $C_5^2C_2^2C_4^4=10$(种),

所以共有 $75+100+10=185$(种)选派方法.

(**方法二:根据女车工被选中的数量分类讨论**)4 名女车工都被选中的方法有 $C_4^4C_5^4+C_4^4C_5^3C_2^1+C_4^4C_5^2C_2^2=35$(种),

4 名女车工中有 3 名被选中的方法有 $C_4^3C_2^1C_5^4+C_4^3C_5^3A_2^2=120$(种),

4 名女车工中有 2 名被选中的方法有 $C_4^2C_2^2C_5^4=30$(种),

所以共有 $35+120+30=185$(种)选派方法.

6.3 二项式定理

6.3.1 二项式定理

对点上分

1. C

攻略上分 易知本题为求二项展开式的特定项问题,可根据通法攻略的解题步骤求解.

【解析】因为二项式 $\left(\sqrt[3]{x}-\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^6$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_6^r\cdot(\sqrt[3]{x})^{6-r}\cdot\left(-\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^r=C_6^r\left(-\dfrac{1}{2}\right)^r x^{\frac{6-2r}{3}}$, $r=0,1,\cdots,6$, 令 $6-2r=0$, 得 $r=3$,

所以常数项为 $C_6^3\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3=-\dfrac{5}{2}$. **故选 C.**

2. D　【解析】$\left(\frac{a}{x}+\sqrt{x}\right)^5$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_5^r\cdot\left(\frac{a}{x}\right)^{5-r}\cdot(\sqrt{x})^r=C_5^r\cdot a^{5-r}\cdot x^{\frac{3r}{2}-5}$，$r=0,1,\cdots,5$，

令 $\frac{3r}{2}-5=1$，得 $r=4$，所以 $T_5=C_5^4\cdot ax=5ax$.

由题知 $5a=20$，解得 $a=4$. **故选 D.**

3. C　【解析】由 $8\times70\%=5.6$，得 $n=7$，则 $(2x-1)^7$ 的展开式中含 x^4 的项为 $C_7^3(2x)^4\cdot(-1)^3=-560x^4$，

所以所求的系数为 -560. **故选 C.**

4. 70　【解析】二项式 $\left(ax-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_8^r\cdot(ax)^{8-r}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r=C_8^r\cdot a^{8-r}\cdot(-1)^r\cdot x^{8-\frac{3}{2}r}$，$r=0,1,2,3,4,5,6,7,8$，$a>0$.

令 $8-\frac{3}{2}r=5$，得 $r=2$，

由于 x^5 的系数为 28，则 $C_8^2\cdot a^6\cdot(-1)^2=28$，解得 $a=1$，

则 $T_{r+1}=C_8^r\cdot(-1)^r\cdot x^{8-\frac{3}{2}r}$，$r=0,1,2,3,4,5,6,7,8$，

令 $8-\frac{3}{2}r=2$，得 $r=4$，

所以 x^2 的系数为 $C_8^4\cdot(-1)^4=70$.

5. 512　【解析】$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^{10}$ 的展开式的通项为 $T_{k+1}=C_{10}^k(\sqrt{x})^{10-k}\left(-\frac{1}{x}\right)^k=(-1)^kC_{10}^kx^{\frac{10-3k}{2}}$ $(k=0,1,2,\cdots,10)$，

$k=0,2,4,6,8,10$ 时，T_{k+1} 是有理项，

所以所有有理项的系数和等于 $C_{10}^0+C_{10}^2+C_{10}^4+C_{10}^6+C_{10}^8+C_{10}^{10}=512$.

易错警示　**求展开式的有理项时对有理项理解有误致错**

二项式的展开式中的项为 a_nx^k 形式时，当 k 为整数时，该项为有理项，注意不要认为 k 是正整数.

6. A

攻略上分　本题为两个因式相乘求展开式的常数项，可以写出 $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-2\right)^8$ 的展开式的通项，得到 $(2x^3-2)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-2\right)^8$ 的展开式的项，再考虑在何时可以出现常数项.

【解析】因为$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-2\right)^8$的展开式的通项为$T_{r+1}=C_8^r\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{8-r}\cdot(-2)^r(0\leqslant r\leqslant 8,r\in\mathbf{N})$，

所以$(2x^3-2)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-2\right)^8$的展开式的项为$2x^3C_8^r\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{8-r}(-2)^r(0\leqslant r\leqslant 8,r\in\mathbf{N})$和$-2C_8^r\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{8-r}(-2)^r(0\leqslant r\leqslant 8,r\in\mathbf{N})$.

当$r=2$时，$2x^3C_8^r\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{8-r}(-2)^r=2x^3C_8^2x^{-3}(-2)^2=224$，

当$r=8$时，$-2C_8^r\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{8-r}(-2)^r=-2C_8^8(-2)^8=-512$，

所以$(2x^3-2)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-2\right)^8$的展开式的常数项为$-512+224=-288$，**故选** A.

7. C

攻略上分 本题是两个二项式乘积展开式的特定项的系数问题.

【解析】$(x+y)^5$的展开式的通项为$T_{k+1}=C_5^kx^{5-k}y^k$，$k=0,1,2,3,4,5$，

令$k=4$，得$T_5=C_5^4xy^4$；令$k=3$，得$T_4=C_5^3x^2y^3$.

因为$\left(2-\frac{y}{x}\right)(x+y)^5=2(x+y)^5-\frac{y}{x}(x+y)^5$，

所以$\left(2-\frac{y}{x}\right)(x+y)^5$的展开式中$xy^4$的系数为$2C_5^4-C_5^3=0$. **故选** C.

8. D

攻略上分 三项展开式的特定项系数问题.

【解析】$\left(x+\frac{1}{x}+2\right)^6=\left[2+\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]^6$的展开式的通项为$C_6^r2^{6-r}\cdot C_r^kx^{r-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k=C_6^r2^{6-r}C_r^kx^{r-2k}$，$r=0,1,2,\cdots,6$，$k=0,1,2,\cdots,r$.

提示：将其中的两项看成整体，用两次二项式定理求通项

所以含 x^3 的项为 $C_6^3\cdot 2^3\cdot C_3^0x^3+C_6^5\cdot 2\cdot C_5^1x^3=160x^3+60x^3=220x^3$，

提示：$r=3,k=0$ 或 $r=5,k=1$

故 x^3 的系数为 220. **故选** D.

一题多解 若 $x>0$，则 $\left(x+\frac{1}{x}+2\right)^6=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$，展开式的通项为 $T_{r+1}=C_{12}^r(\sqrt{x})^{12-r}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r=C_{12}^rx^{6-r}$，令 $6-r=3$，得 $r=3$，所以 x^3 的系数为 $C_{12}^3=220$.

若 $x<0$，则 $\left(x+\frac{1}{x}+2\right)^6=\left(-x+\frac{1}{-x}-2\right)^6=\left(\sqrt{-x}-\frac{1}{\sqrt{-x}}\right)^{12}$，展开式的通项为 $T_{k+1}=C_{12}^k(\sqrt{-x})^{12-k}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{-x}}\right)^k=(-1)^kC_{12}^k(-x)^{6-k}$，

令 $6-k=3$，得 $k=3$，所以 x^3 的系数为 $(-1)^3\cdot C_{12}^3\cdot(-1)^3=220$.

综上，x^3 的系数为 220，**故选** D.

方法总结 **求三项展开式问题的常用方法**

(1)先将三项式中某两项看成一个整体，转化为二项式展开，在展开式中再将这两项展开即可；

(2)将三项式通过因式分解或完全平方公式转化为二项式或两个二项式的积求解.

9. D

攻略上分 本题为二项式与三项式的乘积，利用多项式乘法找到含 x^4 的项，合并同类项后利用已知系数求参数即可.

【解析】$(1-x)^5$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_5^r(-x)^r=(-1)^rC_5^rx^r(r=0,1,2,3,4,5)$，所以 $(1-x)^5(1+x-ax^2)$ 的展开式中 x^4 的系数为 $(-1)^4C_5^4+(-1)^3C_5^3-a\times(-1)^2C_5^2$，

令 $(-1)^4C_5^4+(-1)^3C_5^3-a\times(-1)^2C_5^2=15$，即 $5-10-10a=15$，

解得 $a=-2$.

10. 11

攻略上分 本题可以转化为两个二项式的和,分别求每个二项式的展开式中对应项的系数,然后相加即可.

【解析】令 $t=x-1$,则 $x=t+1$,所以 $x^9+x^{10}=(t+1)^9+(t+1)^{10}=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+\cdots+a_9t^9+a_{10}t^{10}$,所以 $a_9=C_9^0+C_{10}^1=11$.

11. C 【解析】因为 $C_{10}^0(-2)^0+C_{10}^1\cdot(-2)^1+C_{10}^2(-2)^2+\cdots+C_{10}^{10}(-2)^{10}=(1-2)^{10}=(-1)^{10}=1$,$C_{10}^0(-2)^0=1$,所以 $C_{10}^1(-2)+C_{10}^2(-2)^2+\cdots+C_{10}^{10}\cdot(-2)^{10}=1-1=0$. **故选** C.

12. B 【解析】因为 $C_9^1(1+x)^8+C_9^2\cdot(1+x)^7+\cdots+C_9^8(1+x)+C_9^9(1+x)^0$

$=C_9^0(1+x)^9+C_9^1(1+x)^8+C_9^2(1+x)^7+\cdots+C_9^8(1+x)+C_9^9(1+x)^0-C_9^0(1+x)^9$

提示:注意与二项式定理的结构差异

$=[(1+x)+1]^9-(1+x)^9=(x+2)^9-(x+1)^9$,

所以 x^3 的系数为 $C_9^6\times2^6-C_9^6=C_9^6\times(2^6-1)=84\times63=5\,292$. **故选** B.

13. C_{2n}^n 【解析】因为 $(1+x)^n(x+1)^n=(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n)(C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}+C_n^2x^{n-2}+\cdots+C_n^n)$,因此 $(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\cdots+(C_n^{n-1})^2+(C_n^n)^2$ 是 $(1+x)^n(x+1)^n$ 的展开式中 x^n 的系数,而 $(1+x)^{2n}$ 的展开式中 x^n 的系数为 C_{2n}^n,所以 $(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\cdots+(C_n^{n-1})^2+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$.

6.3.2　二项式系数的性质

对点上分

1. BD 【解析】因为 $(1+x)^n$ 的展开式中第 5 项与第 9 项的二项式系数相等,故 $C_n^4=C_n^8$,所以 $n=12$,偶数项的二项式系数分别为 C_{12}^1,C_{12}^3,C_{12}^5,C_{12}^7,C_{12}^9,C_{12}^{11},又 $C_{12}^1=C_{12}^{11}=12$,$C_{12}^3=C_{12}^9=220$,$C_{12}^5=C_{12}^7=792$,**故选** BD.

2. B 【解析】由于 $\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^n$ 的展开式

中只有第 4 项的二项式系数最大，则展开式中共有 7 项，故 $n=6$.

易错点 $(a+b)^n$ 的展开式中，当 n 为奇数或偶数时，二项式系数最值的情况不同

$\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^6$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_6^r\cdot(x^2)^{6-r}\cdot\left(-\frac{2}{x}\right)^r=(-2)^r\cdot C_6^r\cdot x^{12-3r}$，$0\leqslant r\leqslant 6$，$r\in\mathbf{Z}$，

令 $12-3r=3$，解得 $r=3$，

所以展开式中 x^3 的系数为 $(-2)^3\cdot C_6^3=-160$. **故选** B.

3. C 【解析】二项式 $\left(\frac{x^2}{2}-x^{-\frac{1}{2}}\right)^n$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_n^r\left(\frac{x^2}{2}\right)^{n-r}\cdot(-x^{-\frac{1}{2}})^r=(-1)^r\left(\frac{1}{2}\right)^{n-r}C_n^r x^{2n-\frac{5r}{2}}$，

因为展开式中第 9 项为常数项，所以 $2n-\frac{5}{2}\times 8=0$，则 $n=10$，

故第 $r+1$ 项的系数的绝对值为 $\left(\frac{1}{2}\right)^{10-r}C_{10}^r$.

设展开式中第 $r+1$ 项的系数的绝对值最大，则有

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{10-r}C_{10}^r\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{9-r}C_{10}^{r+1},\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{10-r}C_{10}^r\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{11-r}C_{10}^{r-1},\end{cases}$$ 即

$$\begin{cases}\frac{10!}{2\cdot r!\ (10-r)!}\geqslant\frac{10!}{(r+1)!\ (9-r)!},\\ \frac{10!}{r!\ (10-r)!}\geqslant\frac{10!}{2\cdot(r-1)!\ (11-r)!},\end{cases}$$

化简得 $\begin{cases}\frac{1}{2\times(10-r)}\geqslant\frac{1}{r+1},\\ \frac{1}{r}\geqslant\frac{1}{2(11-r)},\end{cases}$ 解得 $\frac{19}{3}\leqslant r\leqslant\frac{22}{3}$. 又因为 $r\in\mathbf{N}^*$，故 $r=7$，所以第 8 项的系数的绝对值最大.

4. ACD

攻略上分 易知本题 B 选项为求二项式系数的最大项，计算得到 n 为偶数，可知只有中间一项的二项式系数最大.

【解析】在 $\left(x+\frac{1}{\sqrt[5]{y}}\right)^n$ 中，令 $x=y=1$，由

题意可得 $2^n=1\ 024$，解得 $n=10$.

对于 A，$C_{19}^{10-1}=C_{19}^{9}=C_{19}^{10}$，**故 A 正确**；

对于 B，由题意得，二项式系数为 C_{10}^0，C_{10}^1，C_{10}^2，…，C_{10}^{10}，最大值为 C_{10}^5，即第 6 项的二项式系数最大，**故 B 错误**；

对于 C，二项式 $\left(x+\frac{1}{\sqrt[5]{y}}\right)^{10}$ 的通项为 $T_{r+1}=C_{10}^r\cdot x^{10-r}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[5]{y}}\right)^r=C_{10}^r\cdot x^{10-r}\cdot y^{-\frac{1}{5}r}$，$r=0,1,2,\cdots,10$，

当 $r=0,5,10$ 时，$10-r\in\mathbf{Z}$ 且 $-\frac{1}{5}r\in\mathbf{Z}$，此时 T_{r+1} 是有理项，即展开式中有理项有 3 项，**故 C 正确**；

对于 D，设 $S=C_{10}^0+C_{10}^1+2C_{10}^2+3C_{10}^3+\cdots+9C_{10}^9+10C_{10}^{10}-1$，则 $S=10C_{10}^0+9C_{10}^1+8C_{10}^2+\cdots+C_{10}^9+C_{10}^{10}-1$，

两式相加得，$2S=10(C_{10}^0+C_{10}^1+C_{10}^2+\cdots+C_{10}^9+C_{10}^{10})$，所以 $S=\frac{10\times2^{10}}{2}=5\ 120$，**故 D 正确. 故选 ACD.**

关键点拨 二项式系数最大问题

$(a+b)^n$ 的展开式有 $(n+1)$ 项，当 n 为奇数时，二项式系数 $C_n^{\frac{n-1}{2}}$，$C_n^{\frac{n+1}{2}}$ 同时为最大值，即二项式系数最大的项有两项；当 n 为偶数时，二项式系数 $C_n^{\frac{n}{2}}$ 最大，即二项式系数最大的项只有一项.

5. C 【解析】由条件知 $2^n=32$，解得 $n=5$，$\left(\sqrt{x}+\frac{a}{\sqrt[3]{x}}\right)^5$ 的通项为 $T_{k+1}=C_5^k\cdot(\sqrt{x})^{5-k}\left(\frac{a}{\sqrt[3]{x}}\right)^k=C_5^k a^k x^{\frac{15-5k}{6}}$，$k=0,1,2,\cdots,5$，令 $15-5k=0$，得 $k=3$，所以常数项为 $C_5^3a^3=80$，解得 $a=2$. **故选 C.**

6. ABD 【解析】$\left(x-\frac{2}{y}\right)^7$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_7^r x^{7-r}\left(-\frac{2}{y}\right)^r=(-2)^rC_7^r x^{7-r}y^{-r}$，$r=0,1,2,\cdots,7$.

对于 A，令 $7-r=5$，解得 $r=2$，则 x^5y^{-2} 的系数为 $(-2)^2C_7^2=84$，**故 A 正确**；

对于 B，将 $x=1,y=1$ 代入 $\left(x-\frac{2}{y}\right)^7$ 中，可得各项系数之和为 $\left(1-\frac{2}{1}\right)^7=-1$，**故 B 正确**；

对于 C，二项式系数之和为 $2^7=128$，**故 C 错误**；

对于 D，二项式展开后共有 8 项，所以二项式系数最大的项是第 4 项和第 5 项，**故 D 正确. 故选 ABD.**

7. C

攻略上分 本题用赋值法求各项系数之和.

【解析】由 $\left(\frac{2}{x}-3x\right)^n$ 的展开式中，只有第 6 项的二项式系数 C_n^5 最大，所以 $n=10$. 在 $\left(\frac{2}{x}-3x\right)^{10}$ 中，令 $x=1$，得 $(2-3)^{10}=1$，所以各项系数之和为 1. **故选 C.**

8. B 【解析】$(5x+3)^n$ 的展开式中二项式系数的和为 2^n，各项系数的和为 $(5+3)^n=8^n$，由题知 $\frac{2^n}{8^n}=\frac{1}{256}$，即 $4^n=256$，解得 $n=4$. **故选 B.**

9. BCD

攻略上分 本题用赋值法求 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_7$ 及 $a_0+a_2+a_4+a_6$ 的值.

【解析】当 $x=-2$ 时，$(-2)^4+(-1)^7=a_0=15$，**故 A 错误**；

$x^4+(x+1)^7=[(x+2)-2]^4+[(x+2)-1]^7$，则 $(x+2)^3$ 的系数为 $-2C_4^1+C_7^4(-1)^4=27$，故 $a_3=27$，**故 B 正确**；

当 $x=-1$ 时，$(-1)^4+0=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_7=1$，**故 C 正确**；

当 $x=-3$ 时，$(-3)^4+(-2)^7=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_7=-47$，

又 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_7=1$，所以 $2(a_0+a_2+a_4+a_6)=-46$，

则 $a_0+a_2+a_4+a_6=-23$，**故 D 正确. 故**

选 BCD.

10. ABD 【解析】令 $x+1=t$，可得 $x=t-1$，代入题干等式得 $(-1+t)^{2026}=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_{2026}t^{2026}$.

令 $f(t)=(-1+t)^{2026}=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_{2026}t^{2026}$.

对于 A 选项，$(-1+t)^{2026}$ 的展开式的通项为 $T_{k+1}=C_{2026}^{k}\cdot(-1)^{2026-k}t^k$ $(0\leqslant k\leqslant 2026,k\in\mathbf{N})$，

所以 $a_1=C_{2026}^{1}\cdot(-1)^{2025}=-2026$，A **正确**；

对于 B 选项，$a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{2026}=f(-1)=(-2)^{2026}=2^{2026}$，B **正确**；

对于 C 选项，由 A 选项可知，$a_k=C_{2026}^{k}\cdot(-1)^{2026-k}(0\leqslant k\leqslant 2026,k\in\mathbf{N})$，

当 k 为奇数时，$a_k<0$，且 $a_k=-C_{2026}^{k}$，

当 k 为偶数时，$a_k>0$，且 $a_k=C_{2026}^{k}$，

结合二项式系数的增减性可知，$a_k(0\leqslant k\leqslant 2026,k\in\mathbf{N})$ 中最大的是 a_{1012} 和 a_{1014}，C **错误**；

对于 D 选项，$f'(t)=a_1+2a_2t+\cdots+2026a_{2026}t^{2025}=2026(t-1)^{2025}$，

提示：根据 a_k 系数的特点，考虑将 $f(t)$ 求导

故 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+2026a_{2026}=f'(1)=2026(1-1)^{2025}=0$，D **正确. 故选** ABD.

11. C 【解析】在杨辉三角中，第 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 行从左至右第 $(r+1)$ 个数为 C_n^r，

则第 m 行中从左至右第 14 个数与第 15 个数分别为 C_m^{13}，C_m^{14}，

由题意知 $\dfrac{C_m^{13}}{C_m^{14}}=\dfrac{\dfrac{m!}{(m-13)!\ 13!}}{\dfrac{m!}{(m-14)!\ 14!}}=\dfrac{2}{3}$，化简可得 $\dfrac{14}{m-13}=\dfrac{2}{3}$，

解得 $m=34$. **故选** C.

12. C 【解析】杨辉三角中第 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 行从左至右第 r 个数为 C_n^{r-1}，

则新的三角数阵中第 n 行的第 r 个数为 $C_n^{r-1}\cdot(r-1)$，则第 n 行的所有数的和为 $0\times C_n^0+C_n^1+2\times C_n^2+\cdots+n\times C_n^n$，

设 $f(x)=(1+x)^n=C_n^0\cdot x^0+C_n^1\cdot x+C_n^2\cdot x^2+\cdots+C_n^n\cdot x^n, n\in\mathbf{N}^*$,

则 $f'(x)=n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2C_n^2\cdot x+3C_n^3\cdot x^2+\cdots+nC_n^n\cdot x^{n-1}$,

令 $x=1$ 得 $f'(1)=n\cdot 2^{n-1}=C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n$,

所以新的三角数阵中第 n 行的所有数的和为 $n\cdot 2^{n-1}$,则第 100 行的所有数的和为 100×2^{99}. **故选 C.**

13. D

攻略上分 $51^{2\,020}+a$ 能被 13 整除,考查二项式定理的应用,由 $51=52-1$,将 $51^{2\,020}$ 展开,求其被 13 除的余数,令余数与 a 的和能被 13 整除即可.

【解析】 $51^{2\,020}=(13\times4-1)^{2\,020}=(52-1)^{2\,020}=(1-52)^{2\,020}=C_{2\,020}^0-C_{2\,020}^1 52+C_{2\,020}^2 52^2-\cdots+C_{2\,020}^{2\,020}52^{2\,020}$.

提示:将 51 写成 13 的整数倍与其他数的差的形式,再用二项式定理展开

因为 52 能被 13 整除,所以展开式从第二项起,每一项都可以被 13 整除,

提示:与 52 相关的部分都可以被 13 整除

所以 $51^{2\,020}$ 被 13 除,余数为 $C_{2\,020}^0=1$,

所以要使 $51^{2\,020}+a\,(a\in\mathbf{Z}$,且 $0\leqslant a<13)$ 能被 13 整除,只需 $a+1=13$ 即可,

故 $a=12$.

14. D

攻略上分 题目明确给出了同余的相关定义,又涉及二项展开式,本质就是利用二项式定理求解余数问题.

【解析】 由题意可得 $a=(1+2)^{20}=3^{20}=9^{10}=(8+1)^{10}$,由二项式定理可得 $(8+1)^{10}=C_{10}^0\times8^{10}+C_{10}^1\times8^9+\cdots+C_{10}^9\times8^1+1$,

故 a 除以 8 的余数为 1,

提示:展开式中与 8 有关的部分都可以被 8 整除,剩下的即为余数

因为 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ 8)$,所以 b 除以 8 的余

数也为 1,选项中只有 2 025 除以 8 的余数为 1,则 b 的值可以是 2 025.

15. (1)【证明】当 $n=1$ 时,满足 $(1+x)^n\geqslant 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2$,当 $n\geqslant 2$ 时,$(1+x)^n=C_n^0x^0+C_n^1x^1+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n\geqslant C_n^0x^0+C_n^1x^1+C_n^2x^2=1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2$,当且仅当 $n=2$ 时,等号成立.

故 $(1+x)^n\geqslant 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2(x>0,n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)【解】依题意,10 年后该地区有 $1\ 000(1+1.1\%)^{10}$ 万人,

由(1)得 $(1+x)^n\geqslant 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2$ $(x>0,n\in\mathbf{N}^*)$,

则 $1\ 000(1+1.1\%)^{10}\geqslant 1\ 000\times\left[1+10\times 1.1\%+\frac{10\times 9}{2}\times(1.1\%)^2\right]=1\ 000\times 1.115\ 445\approx 1\ 115$.

故 10 年后该地区大约有 1 115 万人.

6.3 节测上分

1. B 【解析】在 $(1-2x)^5$ 的展开式中含 x^3 的项为 $C_5^3(-2x)^3=-80x^3$,所以所求系数为 -80. **故选** B.

2. A 【解析】$(x^2+y-2)^5$ 表示 5 个 (x^2+y-2) 的乘积,在这 5 个因式中,有 2 个因式选 x^2,2 个因式选 y,剩下的 1 个因式选 -2,即可得到含 x^4y^2 的项,故 x^4y^2 的系数为 $C_5^2C_3^2C_1^1\cdot(-2)=-60$,**故选** A.

3. D 【解析】由杨辉三角结合二项式系数可知 $a_n=C_{n+1}^2=\frac{n(n+1)}{2}$,

所以 $\frac{1}{a_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,

提示:利用裂项相消法求和

则 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2\ 024}}+\frac{1}{a_{2\ 025}}=2\times\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+2\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+2\times\left(\frac{1}{2\ 024}-\frac{1}{2\ 025}\right)+2\times\left(\frac{1}{2\ 025}-\frac{1}{2\ 026}\right)=2\times\left(1-\frac{1}{2\ 026}\right)=\frac{2\ 025}{1\ 013}$. **故**

选 D.

4. D 【解析】由题意 $C_n^3=C_n^5$，所以 $n=3+5=8$.

因为 $C_n^r+C_n^{r+1}=\frac{n!}{r!(n-r)!}+\frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!}$

$=\frac{n![(n-r)+(r+1)]}{(r+1)!(n-r)!}$

$=\frac{(n+1)!}{(r+1)!(n-r)!}=C_{n+1}^{r+1}$,

提示：组合数的性质

所以 $C_{10}^{n-1}+C_{10}^{n}+C_{11}^{n+1}+C_{12}^{n+2}=C_{10}^{7}+C_{10}^{8}+C_{11}^{9}+C_{12}^{10}=C_{11}^{8}+C_{11}^{9}+C_{12}^{10}=C_{12}^{9}+C_{12}^{10}=C_{13}^{10}=286$. 故选 D.

5. AB 【解析】对于 A，令 $x=0$，则 $a_0=(-2)^5=-32$，故 A 正确；

对于 B，$(x-2)^5$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_5^r x^{5-r}(-2)^r, r=0,1,2,\cdots,5$，

$(1+x)(x-2)^5$ 的展开式中 x^4 的系数 a_4 为 $(x-2)^5$ 的展开式中 x^4 的系数与 x^3 的系数之和，故 $a_4=C_5^1(-2)^1+C_5^2(-2)^2=-10+40=30$，故 B 正确；

对于 C，将 $x=1$ 代入题中的式子，得 $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=-2$，

将 $x=-1$ 代入题中的式子，得 $a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6=0$，

则 $(a_0+a_2+a_4+a_6)^2-(a_1+a_3+a_5)^2=(a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)(a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6)=0$，故 C 错误；

对于 D，将 $x=2$ 代入题中的式子，得 $(1+2)\times(2-2)^5=a_0+2a_1+2^2a_2+\cdots+2^6a_6=0$，

所以 $\sum_{i=1}^{6}(2^i a_i)=0-a_0=0-(-32)=32$，D 错误. 故选 AB.

6. D

思路导引 利用二项式系数的单调性可判断 A 选项；利用二项展开式可判断 B 选项；利用二项展开式的通项可判断 C 选项；由展开式的通项知项的系数为其二项式系数，假设 $C_{14}^k, C_{14}^{k+1}, C_{14}^{k+2}(0\leqslant k\leqslant 12, k\in \mathbf{N})$ 成等差数列，利用等差中项的性质结合组合数公式求 k，可判断 D 选项.

【解析】对于 A 选项，$\left(x^3+\frac{1}{x}\right)^{14}$ 的展开式有 15 项，其中第 8 项的二项式系数最大，A 错误；

对于 B 选项，当 $x=1$ 时，$\left(x^3+\frac{1}{x}\right)^{14}=2^{14}=4^7=(3+1)^7=3^7+C_7^1\cdot3^6+\cdots+C_7^6\cdot3+1$，

因为 $3^7+C_7^1\cdot3^6+\cdots+C_7^6\cdot3$ 能被 3 整除，故 2^{14} 被 3 除的余数为 1，B 错误；

对于 C 选项，$\left(x^3+\frac{1}{x}\right)^{14}$ 的展开式的通项为 $T_{k+1}=C_{14}^k\cdot(x^3)^{14-k}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^k=C_{14}^k\cdot x^{42-4k}(0\leqslant k\leqslant14,k\in\mathbf{N})$，

由 $42-4k=0$，解得 $k=\frac{21}{2}\notin\mathbf{N}$，故展开式中不存在常数项，C 错误；

对于 D 选项，由 C 选项可知，展开式中项的系数都为其二项式系数，

不妨设 $C_{14}^k,C_{14}^{k+1},C_{14}^{k+2}(0\leqslant k\leqslant12,k\in\mathbf{N})$ 成等差数列，

则 $2C_{14}^{k+1}=C_{14}^k+C_{14}^{k+2}$，即 $\frac{2\times14!}{(k+1)!\cdot(13-k)!}=\frac{14!}{k!\cdot(14-k)!}+\frac{14!}{(k+2)!\cdot(12-k)!}$，整理得 $k^2-12k+32=0$，解得 $k=4$ 或 $k=8$，故展开式中存在连续 3 项的系数成等差数列，D 正确. 故选 D.

7\. 2^9　3^{10}　【解析】奇数项的二项式系数和为 $2^{10-1}=2^9$.

令 $x=1$，可知所有项的系数和为 3^{10}.

8\. 1　【解析】$(x^2+x+a)^5$ 的展开式中含 x^5 的项为 $C_5^5x^5+C_5^1(x^2)^1C_4^3x^3C_1^1a+C_5^2(x^2)^2C_3^1x^1C_2^2a^2=51x^5$，

所以 $1+20a+30a^2=51$，解得 $a=1$ 或 $a=-\frac{5}{3}$（舍）.

9\. 【解】(1) 由题意得，$2C_n^2=C_n^1+C_n^3(n\geqslant3$ 且 $n\in\mathbf{N}^*)$，即 $2\cdot\frac{n(n-1)}{2}=n+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}(n\geqslant3$ 且 $n\in\mathbf{N}^*)$，可得 $n^2-9n+14=0$，解得 $n=7$.

(2) 二项式系数最大的项为 $T_4=C_7^3(x^2)^4\cdot$

$\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^3=280x^{\frac{13}{2}}$，$T_5=C_7^4(x^2)^3\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^4=560x^4$.

(3)展开式共有 8 项,展开式的通项为 $T_{k+1}=C_7^k(x^2)^{7-k}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^k=2^k\cdot C_7^k\cdot x^{\frac{28-5k}{2}}$ $(k=0,1,2,\cdots,7)$,

当$\frac{28-5k}{2}$为整数,即 $k\in\{0,2,4,6\}$时,T_{k+1} 为有理项,即有理项有 4 项,

则有理项不相邻的概率为$\frac{A_4^4A_5^4}{A_8^8}=\frac{1}{14}$.

提示:不相邻问题用插空法求解

真题上分

1. D 【解析】由题意知初中部和高中部人数之比为$\frac{400}{200}=\frac{2}{1}$,则从初中部和高中部抽取的人数分别为 40,20,所以不同的抽样结果共有 $C_{400}^{40}\cdot C_{200}^{20}$ 种,**故选** D.

2. B 【解析】先从 5 名志愿者中选出 1 名志愿者参加星期六、星期日两天的公益活动,再从剩下的 4 名志愿者中选出 2 名志愿者分别参加星期六、星期日的公益活动,共有 $C_5^1A_4^2=60$(种)不同的安排方式,**故选** B.

3. C 【解析】甲、乙两人选读的课外读物中恰有 1 种相同的选法共有 $C_6^1C_5^1C_4^1=120$(种),**故选** C.

一题多解 **方法一:**甲、乙从 6 种课外读物中各自选读 2 种,选法有 $C_6^2\times C_6^2=225$(种),其中,甲、乙选读的读物完全相同的选法有 $C_6^2=15$(种),甲、乙选读的读物完全不同的选法有 $C_6^2\times C_4^2=90$(种),因此所求选法共有 $225-15-90=120$(种).**故选** C.

方法二:从 6 种课外读物中任选 3 种,选法有 $C_6^3=20$(种),然后把这 3 种读物分别安排为两人共同的读物、甲的读物、乙的读物,排列方法有 3! 种,因此所求选法共有 $C_6^3\times 3!=120$(种).**故选** C.

4. B 【解析】先将丙和丁捆在一起有 A_2^2 种排列方式，然后将其与乙、戊排列有

提示：对于元素相邻的排列问题选用“捆绑法”

A_3^3 种排列方式，最后将甲插入中间两空中的一个，有 C_2^1 种排列方式，则由分步乘法计数原理得不同的排列方式共有 $A_2^2A_3^3C_2^1=24$(种)，**故选 B.**

5. 64 【解析】由题知，选修 1 门体育类选修课和 1 门艺术类选修课的所有可能结果有 $C_4^1C_4^1=16$(种)；选修 2 门体育类选修课和 1 门艺术类选修课的所有可能结果有 $C_4^2C_4^1=24$(种)；选修 1 门体育类选修课和 2 门艺术类选修课的所有可能结果有 $C_4^1C_4^2=24$(种). 所以不同的选课方案共有 $16+24+24=64$(种).

一题多解 选课方案可以分成两类：第一类，选修 2 门，总的方案减去不符合要求的，有 $C_8^2-2C_4^2=16$(种)；第二类，选修 3 门，有 $C_8^3-2C_4^3=48$(种). 综上，不同的选课方案共有 $16+48=64$(种).

6. $\frac{1}{2}$ 【解析】(列举法)假设乙固定按照 2,4,6,8 的顺序，则甲所有的可能如表所示.

1	3	5	7√	5	1	3	7√
1	3	7	5√	5	1	7	3
1	5	3	7√	5	3	1	7√
1	5	7	3	5	3	7	1
1	7	3	5√	5	7	1	3
1	7	5	3√	5	7	3	1
3	1	5	7√	7	1	3	5√
3	1	7	5	7	1	5	3√
3	5	1	7	7	3	1	5√
3	5	7	1	7	3	5	1√
3	7	1	5	7	5	1	3
3	7	5	1	7	5	3	1

从中找均小于 2,4,6,8 与有 3 个数字分别小于 2,4,6,8 的情况，此时甲得 0 分或 1 分，符合上述情况的有表中打√的 12 种情况.

那么甲的总得分不小于 2 分也有 12 种情况，由古典概型概率公式得所求概率为 $\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$.

说明：固定乙的顺序，将甲的

情况排列出来，去挑选，也可以从中判断甲有 2 个及以上的数字超过乙的. 如果改变乙的顺序，其情况是类似的

一题多解 不妨设甲四轮比赛中所选卡片顺序固定，即四轮比赛所选卡片依次为 1,3,5,7，此时乙有 $A_4^4=24$(种)选法. 甲可能得 0,1,2,3 分，但不可能得 4 分.

当甲得 2 分时，

若甲第二、三轮的数字大，则有 1 种选法；

若甲第二、四轮的数字大，则有 $A_2^2+1=3$(种)选法；

若甲第三、四轮的数字大，则有 $A_2^2A_2^2+1+A_2^2=7$(种)选法，

共有 $1+3+7=11$(种)选法.

当甲得 3 分时，甲第一轮的数字小，其他三轮的数字大，有 1 种选法.

故甲的总得分不小于 2 的概率 $P=\frac{11+1}{24}=\frac{1}{2}$.

7. 24　112　【解析】第一空，共选 4 个方格：选第 1 个方格，在 16 个方格中任选 1 个，有 16 种选法；

选第 2 个方格，需在除去所选第 1 个方格所在行、列的方格(共 9 个)中任选 1 个，有 9 种选法；

选第 3 个方格，需在除去所选的第 1 和第 2 个方格所在行、列的方格(共 4 个)中任选 1 个，有 4 种选法；

选第 4 个方格，需在除去所选的第 1、第 2 和第 3 个方格所在行、列的方格(共 1 个)中任选 1 个，有 1 种选法.

对于选好的 4 个方格无顺序限制，所以不同的选法有 $\frac{16\times9\times4\times1}{4!}=24$(种).

第二空，由题图可知，各行的数从左往右均依次增大，各列的数从上往下依次增大或不变，所以要使选中方格的 4 个数之和最大，可从右往左从各列中选数字较大的方格，所选方格中的数为 44，33,22,11 和 44,33,21,13，其和分别为 110 和 111.

又从左往右各列数字的极差分别为 4,3,3,4,所以按极差从大到小各列选 15,43,33,21,其和为 112.

比较以上各数,最大的是 112.

8. $\frac{7}{15}$ 【解析】记取出的三个球上的数字按先后顺序分别为 a,b,c,则共有 $A_6^3=120$(种)可能. 由题知,$|m-n|=\left|\frac{a+b}{2}-\frac{a+b+c}{3}\right|=\left|\frac{a+b-2c}{6}\right|\leqslant 0.5$,即 $|a+b-2c|\leqslant 3$,所以 $2c-3\leqslant a+b\leqslant 2c+3$,其中$(a,b)$的不同取法共有 $A_6^2=30$(种),对应的 $a+b$ 的取值如表所示. 根据对称性知,$c=1$ 或 6 时,均有 2 种可能;

提示:$c=1$ 时,$a=2,b=3$ 或 $a=3,b=2$;$c=6$ 时,$a=4,b=5$ 或 $a=5,b=4$

$c=2$ 或 5 时,均有 10 种可能;

提示:$c=2$ 时,(a,b) 的值可为 (1,3),(3,1),(1,4),(4,1),(1,5),(5,1),(1,6),(6,1),(3,4),(4,3),共 10 种情况,同理可分析 $c=5$ 的情况

$c=3$ 或 4 时,均有 16 种可能,

提示:$c=3$ 时,(a,b) 的值可为 (1,2),(2,1),(1,4),(4,1),(1,5),(5,1),(1,6),(6,1),(2,4),(4,2),(2,5),(5,2),(2,6),(6,2),(4,5),(5,4),共 16 种情况,同理可分析 $c=4$ 时的情况

故满足条件的共有 $2\times2+2\times10+2\times16=56$(种)可能,故所求概率 $P=\frac{56}{120}=\frac{7}{15}$.

$a+b$ 的取值表

b	a					
	1	2	3	4	5	6
1		3	4	5	6	7
2	3		5	6	7	8
3	4	5		7	8	9
4	5	6	7		9	10
5	6	7	8	9		11
6	7	8	9	10	11	

9. -20　【解析】$(x-1)^6$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_6^r x^{6-r}\cdot(-1)^r$（其中 $0\leqslant r\leqslant 6$，$r\in\mathbf{N}$），

令 $6-r=3$，得 $r=3$，故 x^3 的系数为 $C_6^3\cdot(-1)^3=-20$.

易错警示 此题容易漏掉负号，不要忘记 $(-1)^3=-1$.

10. 1　15　【解析】$(1-2x)^4=a_0+a_1(-2x)+a_2(-2x)^2+a_3(-2x)^3+a_4(-2x)^4$，结合 $(1-2x)^4$ 的展开式可知 $a_0=C_4^0=1$，$a_1+a_2+a_3+a_4=C_4^1+C_4^2+C_4^3+C_4^4=15$.

另解：$a_1+a_2+a_3+a_4=2^4-1=15$

一题多解（赋值法）令 $x=0$，可得 $a_0=1$；

令 $x=-\dfrac{1}{2}$，可得 $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4=\left[1-2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right]^4=16$，

故 $a_1+a_2+a_3+a_4=16-a_0=15$.

11. 20　【解析】$\left(\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{3}{x^2}\right)^6$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_6^r\left(\dfrac{x^2}{3}\right)^{6-r}\cdot\left(\dfrac{3}{x^2}\right)^r=C_6^r 3^{2r-6}x^{12-4r}$，令 $12-4r=0$，得 $r=3$，故常数项为 $C_6^3\times 3^0=20$.

12. 5　【解析】二项式 $\left(\dfrac{1}{3}+x\right)^{10}$ 的展开式的通项为 $T_{k+1}=C_{10}^k\left(\dfrac{1}{3}\right)^{10-k}x^k$. 由
$$\begin{cases}C_{10}^k\left(\dfrac{1}{3}\right)^{10-k}>C_{10}^{k-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{11-k},\\ C_{10}^k\left(\dfrac{1}{3}\right)^{10-k}>C_{10}^{k+1}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{9-k},\end{cases}$$
解得 $\dfrac{29}{4}<k<\dfrac{33}{4}$. 又 $k\in\mathbf{N}^*$，所以 $k=8$.

所以所求系数的最大值为 $C_{10}^8\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=5$.

一题多解（代数计算）展开式中系数最大的项一定在下面的 5 项中：

$C_{10}^5\left(\dfrac{1}{3}\right)^5x^5$，$C_{10}^6\left(\dfrac{1}{3}\right)^4x^6$，$C_{10}^7\left(\dfrac{1}{3}\right)^3x^7$，$C_{10}^8\left(\dfrac{1}{3}\right)^2x^8$，$C_{10}^9\left(\dfrac{1}{3}\right)^1x^9$，计算可得，

所求系数的最大值为 $C_{10}^8\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=5$.

素养上分

1. C 【解析】第一类，先选一块地种植一种旱碱麦，剩下的三块地种植另外一种旱碱麦，则不同的种植方案有 $C_4^1A_2^2=8$(种)；第二类，先选两块地种植一种旱碱麦，剩下的两块地种植另外一种旱碱麦，则不同的种植方案有 $\frac{C_4^2}{A_2^2}\cdot A_2^2=6$(种). 故不同的种植方案共有 $8+6=14$(种). **故选** C.

2. D 【解析】依题意，1 根算筹只能表示 1；2 根算筹可以表示 2，6，
3 根算筹可以表示 3，7，
4 根算筹可以表示 4，8.
依题意 6 根算筹可以分为(1，1，4)，(1，2，3)，(2，2，2)三种情况：
若为(1，1，4)，则有 $2A_3^1=6$(个)三位数，
若为(1，2，3)，则有 $2\times2A_3^2=24$(个)三位数，
若为(2，2，2)，则有 $2\times2\times2=8$(个)三位数，
综上，一共可以表示 $6+24+8=38$(个)不含数字 0 的三位数. **故选** D.

3. A

思路导引 以"宫"的顺序将音阶排序分为四类，再考虑"商""角"顺序，运用排列组合知识求解.

【解析】令五音阶音序按从首到末的顺序分别为第 1，2，3，4，5 音阶.
①若"宫"为第 1 音阶，"商""角"可取 24，25，35 音阶，
排成的五音阶音序有 $C_3^1A_2^2A_2^2=12$(种)；
②若"宫"为第 2 音阶，"商""角"可取 13，14，15，35 音阶，
排成的五音阶音序有 $C_3^1A_2^2A_2^2+A_2^2=14$(种)；
③若"宫"为第 3 音阶，"商""角"可取 14，15，24，25 音阶，
排成的五音阶音序有 $C_2^1A_2^2A_2^2+C_2^1A_2^2=12$(种)；

④若“宫”为第 4 音阶,“商”“角”可取 13,15,25,35 音阶,

排成的五音阶音序有 $C_2^1A_2^2A_2^2+C_2^1A_2^2=12$(种).

由分类加法计数原理可知,一共有 $12+14+12+12=50$(种)排法.

故选 A.

4. A 【解析】依题意分两种情况讨论:

提示:先分组,再分配,注意部分平均分组需要除以组数(平均分组的组数)的全排列

①将 6 种算法分成 1,1,1,3 四组,再分配给四人,则有 $C_6^3A_4^4=480$(种);

②将 6 种算法分成 1,1,2,2 四组,再分配给四人,则有 $\dfrac{C_6^2C_4^2A_4^4}{A_2^2}=1\ 080$(种).

综上,一共有 $480+1\ 080=1\ 560$(种)不同的分配方案. **故选** A.

5. 39　140 【解析】易知 00001110 对应的十进制数为 $1\times3^3+1\times3^2+1\times3^1=27+9+3=39$.

先将 3 个 0,2 个 1 进行排列,共有 $C_5^3=10$(种),

再将 3 个−1 插入到 6 个空隙中去,共有 $C_6^3=20$(种),

所以能表示出的不同的三进制数共有 $C_6^3C_5^3=200$(种),

其中首位 a_7 为 0 的共有 $C_4^2C_5^3=60$(种),

则符合题意的不同的三进制数个数共有 $200-60=140$.

关键点拨 本题关键在于利用插空法将 3 个−1 插入到 6 个空隙中去,求得总个数,然后减去首位 a_7 为 0 时的个数即可得出结果.

6. D

思路导引 先求出不考虑旋转的条件下的涂色情况,再求出正四面体旋转方式的总数,即可求解.

【解析】若不考虑旋转的情况,共有 $A_9^4=3\ 024$(种)涂色方法,而正四面体

共有 $4\times3=12$(种)旋转方式,故共有 $\dfrac{3\,024}{12}=252$(种)涂色情况. **故选 D.**

7. $C_{100}^{40}\cdot3^{60}\cdot2^{40}$ 【解析】二项式 $(3+2x)^{100}$ 的展开式通项为 $T_{k+1}=C_{100}^{k}3^{100-k}(2x)^{k}$,则 $a_k=C_{100}^{k}3^{100-k}2^{k}$,

设第 $k+1$ 项最大,

则 $\begin{cases}C_{100}^{k}3^{100-k}2^{k}\geqslant C_{100}^{k-1}3^{100-(k-1)}2^{k-1},\\ C_{100}^{k}3^{100-k}2^{k}\geqslant C_{100}^{k+1}3^{100-(k+1)}2^{k+1},\end{cases}$

解得 $39+\dfrac{2}{5}\leqslant k\leqslant40+\dfrac{2}{5}$,所以 $k=40$,

故$\{a_k\}$的最大项是 $a_{40}=C_{100}^{40}\cdot3^{60}\cdot2^{40}$.

8. 512

思路导引 先应用题干条件及数列性质分析得出三种情况,再列出根据情况得出的组合数的和,最后应用二项式系数和公式计算即可.

【解析】将排列看作数列,若 $a_i<a_{i+1}$,考虑 $a_{i+1}(i\leqslant8)$,必有 $a_{i+1}<a_{i+2}$,可知从第 i 项开始,数列开始递增;

再考虑 a_i 前面的项,若 $a_{i-1}>a_i$ 等价于 $a_{i-2}>a_{i-1}(i\geqslant3)$,说明此情况下数列在第 1 项到第 i 项递减.

若 $a_{i-1}<a_i$,则将原来的 i 改为 $i-1$ 同理考虑即可.

由以上分析可知,该数列只有三种情况,递减,递增,先减后增,

故排列总数为 $C_9^0+C_9^1+C_9^2+\cdots+C_9^9=(1+1)^9=2^9=512$.

第六章 全章上分

1. B 【解析】先从四对双胞胎中选出一对,有 4 种选择;

然后从剩下的 6 个人中选出 2 个人,且不能是同一对双胞胎,

这相当于从三对双胞胎中选出两对,再从每对中选出 1 个人,共有 $3\times2\times2=12$(种)选择.

根据分步乘法计数原理,总共有 $4\times12=48$(种)选法. **故选 B.**

2. A 【解析】将 4 名学生随机排列,共有 A_4^4 种排法,

再将 2 位老师进行“捆绑”,形成一个整体,然后将这个整体插入 4 名学生中间形成的 3 个空位中,

由分步乘法计数原理可知,不同的排法种数为 $A_4^4A_2^2A_3^1=24\times2\times3=144$. **故选** A.

3. B 【解析】将 10 位同学排成 1 列,有 A_{10}^{10} 种方法,安排第 1 位同学坐下,有 10 种可能性,但因为是围着一张圆桌坐成一圈,第 1 位同学坐不同位置没有区别,则不同的坐法的种数为 $\frac{A_{10}^{10}}{10}=A_9^9$. **故选** B.

4. D 【解析】若用五种颜色,则不同的涂色方法有 $A_5^5=120$(种);

若用四种颜色,则 D,E 同色或 B,A 同色,则不同的涂色方法有 $2A_5^4=240$(种),

由分类加法计数原理,得不同的涂色方法共有 $120+240=360$(种),**故选** D.

一题多解 先不考虑至少要用四种颜色,完成涂色需要分五步,按照顺序依次涂区域 $CADEB$,

C 区域有五种颜色可选,A 区域有四种颜色可选,D 区域有三种颜色可选,

若 E 区域与 D 区域颜色相同,即 E 区域有一种颜色可选,则 B 区域有三种颜色可选;

若 E 区域与 D 区域颜色不同,则 E 区域有两种颜色可选,则 B 区域有两种颜色可选;

再由分类加法计数原理和分步乘法计数原理计算可得,共有 $5\times4\times3\times(1\times3+2\times2)=420$(种)涂色方法,

如果只使用三种颜色涂色(小于三种无法涂色),则 A,B 同色且 D,E 同色,共有 $5\times4\times3=60$(种)涂色方法,

所以满足题意的不同的涂色方法有 $420-60=360$(种). **故选** D.

5. B 【解析】由杨辉三角归纳得,C_2^2+

$C_3^2+C_4^2+\cdots+C_{n+1}^2=C_{n+2}^3$,

即 $\frac{1\times2}{2}+\frac{2\times3}{2}+\frac{3\times4}{2}+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}=C_{n+2}^3$,由题意,2 023 层"刍童垛"圆球的总个数为 $S=2\times3+3\times4+4\times5+\cdots+2\ 024\times2\ 025=2\times(C_{2\ 026}^3-1)$. **故选** B.

6. D 【解析】因为 $f(x)=(2-x)^8=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8$,

令 $x=1$,可得 $f(1)=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_8=1$,再令 $x=0$,可得 $a_0=2^8$,

所以 $a_1+a_2+\cdots+a_8=1-a_0=1-2^8=-255$,**故** A **错误**.

因为 $f(1)=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_8=1$,

$f(-1)=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_8=3^8$,

所以 $a_0+a_2+a_4+a_6+a_8=\frac{3^8+1}{2}$,

所以 $a_2+a_4+a_6+a_8=\frac{3^8+1}{2}-2^8$,**故** B **错误**.

由于 $|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_8|$ 为 $(2+x)^8$ 展开式各项系数之和,

故 $|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_8|=3^8$,所以 $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_8|=3^8-2^8$,**故** C **错误**.

由题意,$f(-1)=3^8=9^4=(10-1)^4=C_4^0\times10^4-C_4^1\times10^3+C_4^2\times10^2-C_4^3\times10+1$,

显然,除了最后一项,其余各项均能被 5 整除,$f(-1)$除以 5 所得的余数是 1.

故选 D.

7. ABD 【解析】对于 A,因为 $\left(\frac{1}{x}-2x^2\right)^n$ 的展开式中,各项的二项式系数之和为 128,所以 $2^n=128$,解得 $n=7$,**故** A **正确**;

对于 B,令 $x=1$,则各项系数之和为 $(1-2)^7=-1$,**故** B **正确**;

对于 C,因为 $n=7$,所以第 4 项和第 5 项的二项式系数最大,**故** C **错误**;

对于 D,第二项为 $C_7^1\left(\frac{1}{x}\right)^6\cdot(-2x^2)=-14x^{-4}$,

则第二项的系数为-14,**故** D **正确**. **故选** ABD.

8. ABD 【解析】对于 A,先从 1,2,3,4,5 这 5 个数字中选出 1 个放在千位上,有 $C_5^1=5$(种)选择,

提示: 0 不能排首位

再从添上 0 后的剩余 5 个数字中选出 3 个,放在百位,十位和个位上,有 $A_5^3=60$(种)选择,因此可以组成没有重复数字的四位数的个数为 $5\times60=300$,A **正确**;

对于 B,分两种情况,当个位为 0 时,从 1,2,3,4,5 这 5 个数字中,选择 3 个放在千位,百位和十位上,有 $A_5^3=60$(种)选择,

当个位不为 0 时,先从 2,4 中选择 1 个放在个位上,有 $C_2^1=2$(种)选择,

再考虑千位,从除去 0 外的剩余 4 个数字中,选择 1 个放在千位,有 $C_4^1=4$(种)选择,

再从添上 0 后的 4 个数字中,选择 2 个放在百位和十位上,有 $A_4^2=12$(种)选择,

故可以组成没有重复数字的四位偶数的个数为 $60+C_2^1C_4^1A_4^2=60+96=156$,B **正确**;

对于 C,能被 5 整除的四位数,分为两类:

0 在末位,则有 $A_5^3=60$(种)排列方式,

5 在末位,则有 $C_4^1A_4^2=48$(种)排列方式,

所以共有 $60+48=108$(个)能被 5 整除的不重复的四位数,**故 C 错误**;

对于 D,若组成的没有重复数字的四位数千位为 1,此时在剩余的 5 个数字中选择 3 个,分别安排在百位、十位和个位,有 $A_5^3=60$(个)四位数.

若组成的没有重复数字的四位数千位为 2,此时在剩余的 5 个数字中选择 3 个,分别安排在百位,十位和个位,有 $A_5^3=60$(个)四位数,

提示: 根据千位百位十位个位数字依次从小到大排列

$60<85<120$,故将组成的四位数按从小

到大的顺序排成一列,则第 85 个四位数千位为 2.

若组成的没有重复数字的四位数千位为 2,百位为 0,此时从剩余的 4 个数字中选择 2 个放在十位和个位,组成的没有重复数字的四位数有 $A_4^2=12$(个),$60+12=72<85$. 同理可得,若组成的没有重复数字的四位数千位为 2,百位为 1,组成的没有重复数字的四位数有 $A_4^2=12$(个),$72+12=84<85$.

因此将组成的四位数按从小到大的顺序排列,则第 85 个数为 2 301,D 正确.

故选 ABD.

9. 45 【解析】根据题意,将 11 个相同的小球放入 3 个盒中,每个盒子至少 1 个,相当于将 11 个相同的小球分成 3 组,每组至少 1 个.

可将 11 个小球排成一列,然后在除两端的 10 个空隙中,选取 2 个,插入隔板,故共有 $C_{10}^2=45$(种)放法.

10. 54 【解析】根据题意可知 A 和 B 都没有得到冠军,且 B 不是最后一名,分两种情况:

①A 是最后一名,则 B 可以为第二、三、四名,即 B 有 3 种排名情况,剩下的 3 人安排在其他三个名次,有 $A_3^3=6$(种)情况,此时有 $3\times6=18$(种)名次排列情况;

②A 不是最后一名,A,B 需要排在第二、三、四名,有 $A_3^2=6$(种)情况,剩下的 3 人安排在其他三个名次,有 $A_3^3=6$(种)情况,此时有 $6\times6=36$(种)名次排列情况.

则 5 人的名次排列方式共有 $18+36=54$(种).

11.【解】(1)$(1-2x)^5(1+3x)^4$ 的展开式中升幂排列第 3 项为 x^2 项,

则展开式的通项为 $(1-2x)^5(1+3x)^4=C_5^m(-2x)^m\cdot C_4^n(3x)^n=(-2)^m\times 3^n C_5^m C_4^n x^{m+n}$,

则当 $m=0,n=2$ 时，$(-2)^0\times3^2C_5^0C_4^2x^2=54x^2$，

当 $m=1,n=1$ 时，$(-2)^1\times3^1C_5^1C_4^1x^2=-120x^2$，

当 $m=2,n=0$ 时，$(-2)^2\times3^0C_5^2C_4^0x^2=40x^2$，

因此 x^2 项为 $54x^2-120x^2+40x^2=-26x^2$，所以 $(1-2x)^5(1+3x)^4$ 的展开式中按 x 的升幂排列的第 3 项为 $-26x^2$.

(2) 由题意知 $\left(9x+\dfrac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}$ 的展开式的通项为 $T_{k+1}=C_{18}^k(9x)^{18-k}\left(\dfrac{1}{3\sqrt{x}}\right)^k=3^{36-3k}C_{18}^kx^{18-\frac{3}{2}k}$，$k=0,1,2,\cdots,18$，

当 $18-\dfrac{3}{2}k=0$ 时，解得 $k=12$，则 $3^{36-36}C_{18}^{12}x^0=18\ 564$，所以常数项为 18 564.

(3) 依题意，$(x^2+x+y)^5=[(x^2+x)+y]^5$，其展开式的通项 $T_{k+1}=C_5^k(x^2+x)^{5-k}y^k$，$k=0,1,2,\cdots,5$，

当 $k=2$ 时，$T_3=C_5^2(x^2+x)^3y^2=10(x^2+x)^3y^2$，

又 $(x^2+x)^3$ 的展开式的通项为 $T'_{t+1}=C_3^t(x^2)^{3-t}\cdot x^t=C_3^tx^{6-t}$，$t=0,1,2,3$，当 $t=1$ 时，$T'_2=C_3^1x^5=3x^5$，

因此含 x^5y^2 的项为 $10\times3x^5y^2=30x^5y^2$，所以 $(x^2+x+y)^5$ 的展开式中 x^5y^2 的系数为 30.

12.【解】(1) 5 个人做 5 项不同的工作，要求每个人只能做 1 项工作，每项工作都有人去做，不同的分配方案种数为 $A_5^5=120$.

(2) 5 人随机排有 $A_5^5=120$（种）排法，其中甲在正中间，其他 4 人随机排，有 $A_4^4=24$（种）排法，乙在排头，其他 4 人随机排，有 $A_4^4=24$（种）排法，甲在正中间，乙在排头，其他 3 人随机排，有 $A_3^3=6$（种）排法.

综上所述，甲不在正中间，乙不在排头

的排法种数为 $120-24-24+6=78$.

一题多解 (2)甲不在中间,乙不在排头的排法可以分两类:

①甲在排头,其他4人随机排,则有 $A_4^4=24$(种)排法;

②甲不在排头也不在中间,甲有3个位置可以选择,乙不在排头,有3个位置可以选择,其他3人随机排,则有 $C_3^1C_3^1A_3^3=54$(种)排法.

综上所述,甲不在中间,乙不在排头的排法种数为 $24+54=78$.

13.【解】(1)从这6人中选出男、女队长各1人参加志愿服务活动,分两步完成,

第一步从男生4人中选1人有4种选法,第二步从女生2人中选1人共2种选法,故有 $4\times2=8$(种)选法.

(2)从这6人中选出3人完成本次活动的宣传工作,其中至少需要1名女生和1名男生,共有2种情况:

第1种:男生选2人,女生选1人,共有 $C_4^2\times2=12$(种)选法,

第2种:男生选1人,女生选2人,共有 $4\times C_2^2=4$(种)选法,

故总共有16种选法.

(3)活动后6人排成一排拍照共有 A_6^6 种排法,其中男生甲与女生乙的相对位置有2种,

所以活动后6人排成一排拍照,男生甲在女生乙的左边共有 $\frac{1}{2}\times A_6^6=360$(种)排法.

提示:定序问题使用除法计算即可

(4)现要将6名志愿者分配到三所学校参加志愿服务活动,每所学校至少分配1人,则三所学校分配志愿者人数的方法可能为{4,1,1},{3,2,1}{2,2,2},

若人数为{4,1,1},则有 $\frac{C_6^4C_2^1C_1^1}{A_2^2}A_3^3=90$(种)安排方法,

若人数为{3,2,1},则有 $C_6^3C_3^2C_1^1A_3^3=360$(种)安排方法,

若人数为{2,2,2},则有 $\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}A_3^3=90$(种)安排方法,

根据分类加法计数原理共有 $90+360+90=540$(种)安排方法.